LE RADICI SUL COMPUTER

come fanno i computer a calcolare la radice quadrata?

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Davide Palitta, Germana Landi
{davide.palitta, germana.landi}@unibo.it

Dipartimento di Matematica, Centro AM^2
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Cos’è un ALGORITMO?

In matematica un algoritmo è la specificazione di una sequenza finita di operazioni (dette anche istruzioni) che consente di risolvere tutti i quesiti di una stessa classe o di calcolare il risultato di un’espressione matematica.
Un algoritmo deve essere

- **finito**: è costituito da un numero finito di istruzioni e deve sempre terminare;
- **eseguibile**: tutte le istruzioni devono essere eseguibili;
- **non ambiguo**: le operazioni non devono poter essere interpretate in modi differenti;
- **generale**: deve essere applicabile a tutti i problemi della classe a cui si riferisce, o ai casi dell’espressione matematica.

E un algoritmo iterativo?

Per il calcolo della radice quadrata (e per molti altri problemi) noi applicheremo un algoritmo iterativo

- Partendo da un *iterato iniziale* x_0, si applicano un certo numero di istruzioni per ottenere un nuovo *iterato* x_1
- Le stesse operazioni si applicano ad x_1 per ottenere x_2
- Si ripete il procedimento per un certo numero di volte dette iterazioni
- Alla k-esima iterazione ci fermiamo se l'iterato ottenuto x_k soddisfa certe condizioni

Se f è una funzione che rappresenta le istruzioni che applichiamo ad ogni iterazione, allora possiamo scrivere il nostro algoritmo ricorsivo come

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Diagramma di flusso

Iniziamo con lo scrivere il diagramma di flusso del metodo di Erone

Simbolo	Blocco	Descrizione
	**Inizio/Fine**	Segnala l'inizio (o la fine dell'algoritmo).
	**Assegnazione**	Contiene un'istruzione con cui viene assegnato un determinato valore ad una variabile.
	**Test**	Presenta una condizione. A seconda che la condizione sia verificata o meno, l'algoritmo indica operazioni differenti da compiere.
	**Lettura**	Acquisisce i dati in *input*.
	**Scrittura**	Restituisce l'*output* indicato.

Figura: *Analisi Numerica*, Marco Rocco, Editrice La Scuola

Diagramma di flusso - Esempio 1

Consideriamo l'algoritmo per calcolare il massimo tra due numeri $x, y \in \mathbb{R}$

Diagramma di flusso - Esempio 1

Consideriamo l'algoritmo per calcolare il massimo tra due numeri $x, y \in \mathbb{R}$

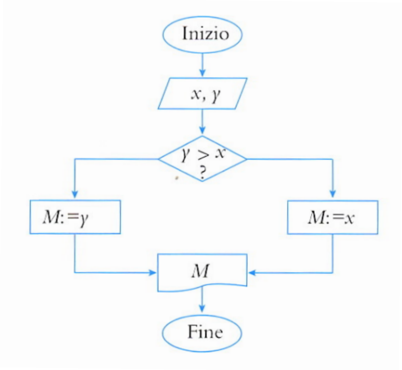

Figura: *Analisi Numerica*, Marco Rocco, Editrice La Scuola

Diagramma di flusso - Esempio 2

e se dovessi calcolare il massimo tra k numeri $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$?

Radicali e loro proprietà

Dato $n \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ ($a \geqslant 0$ se n è pari), viene definita radice ennesima di a quel numero x, se esiste, tale che

$$x^n = a$$

e scriviamo

$$x = \sqrt[n]{a}$$

- L'operazione con la quale viene determinata x si chiama estrazione di radice che è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza
- $\sqrt{\ }$ è il simbolo dell'estrazione di radice
- n è detto indice del radicale
- a è detto radicando

Radicali e loro proprietà

I **radicali** godono delle seguenti proprietà:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Radice quadrata e un po' della sua storia

Noi ci concentreremo sul calcolo della **radice quadrata**, cioè supporremo sempre che l'indice del radicale sia 2 ($n = 2$): $\sqrt{a}$

- il simbolo di radice $\surd$ è stato introdotto dal matematico tedesco Christoff Rudolf nel 1525
- René Descartes (Cartesio) nel 1637 introdusse l'uso del *vinculum* (la lineetta sopra): $\sqrt{2}$
- Il posizionamento del radicale venne proposto da Albert Girard nel 1629, notazione usata inizialmente solo per la radice cubica: $\sqrt[3]{2}$

Come calcoliamo la radice quadrata?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

Come calcoliamo la radice quadrata?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = ?$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \quad \text{FACILE!}$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1225} = ?$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1225} = ?$$

$$\begin{array}{c|c} 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1225 = 5^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{1225} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2} = 35$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = ?$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \approx 1.66666...$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714...$$

Come calcoliamo la radice quadrata?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \approx 1.66666\ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714\ldots$$

$$\sqrt{3547252937} = ?$$

- Provare a calcolare la fattorizzazione in fattori primi è molto poco efficiente
- Riusciamo a progettare un algoritmo più efficiente?
- Che sia anche facile da implementare sul calcolatore?

Il metodo di Erone

Un algortimo ricorsivo per il calcolo della radice quadrata di un numero è il metodo di Erone

Dato $a \geqslant 0$, vogliamo calcolare x tale

$$x = \sqrt{a}$$

Ingredienti di un algoritmo iterativo:

- Un iterato iniziale x_0
- Una f, cioè le giuste istruzioni da applicare ad ogni iterazione
- Decidere a che iterazione fermarci

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come scegliereste l'iterato iniziale x_0?

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come sceglieresti l'iterato iniziale x_0?

- Nel metodo di Erone vogliamo avere un x_0 tale che

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

- Ma noi non conosciamo $\sqrt{a}$!

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come scegliereste l'iterato iniziale x_0?

- Nel metodo di Erone vogliamo avere un x_0 tale che

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

- Ma noi non conosciamo $\sqrt{a}$!
- Possiamo trovare il primo quadrato perfetto $b = c^2$ più grande di a ($b > a$) e scegliere $x_0 \approx c$. In questo modo x_0 sarà vicino a $\sqrt{a}$

Esempio: $a = 7$, il primo quadrato perfetto è $b = 9 = 3^2$ e quindi posso scegliere $x_0 > 3 \approx \sqrt{7} \approx 2.645$

Iterazione del metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Quali sono le *istruzioni giuste* da eseguire ad ogni iterazione?

Proviamo a costruire il metodo di Erone insieme!

Iterazione del metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Quindi, dato x_0, l'iterazione del metodo di Erone può essere scritta come

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k \geqslant 0$$

cioè

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

è la funzione che descrive le istruzioni che il nostro algoritmo iterativo deve compiere ad ogni iterazione

`https://www.geogebra.org/classic/jadvbmpc`

Foglio di lavoro 2 (prima parte)

Errore di approssimazione

$$x = \sqrt{a}$$

Il metodo di Erone ci fornisce due approssimazioni di $\sqrt{a}$:

- approssimazione per eccesso (le basi dei rettangoli)
- approssimazione per difetto (le altezze dei rettangoli)

Errore di approssimazione

$$x = \sqrt{a}$$

Il metodo di Erone ci fornisce due approssimazioni di $\sqrt{a}$:

- approssimazione per eccesso (le basi dei rettangoli)
- approssimazione per difetto (le altezze dei rettangoli)

Dopo un certo numero di iterazioni dobbiamo necessariamente fermarci: non possiamo andare avanti all'infinito!

Errore di approssimazione

Diagramma di flusso - Metodo di Erone

Algoritmo: dato x_0 e fissato $M > 0$, l'iterazione del metodo di Erone è data da

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0, \dots, M$$

Siamo pronti per scrivere il diagramma di flusso del metodo di Erone!

Ma quando ci fermiamo?

L'ultimo ingrediente che ci manca per il nostro algoritmo iterativo è il

CRITERIO D'ARRESTO

cioè dobbiamo capire quando fermarci: **non possiamo andare avanti all'infinito!**

- Per oggi abbiamo fermato il nostro algoritmo dopo un certo numero di iterazioni (2,3,...)
- Questo è un criterio d'arresto che viene usato spesso ma non ci dà informazioni sulla *bontà* della nostra soluzione
- Le proprietà del metodo di Erone possono essere usate per definire altri criteri di arresto

Criterio di arresto

Algoritmo: dato x_0 e fissato $M > 0$, l'iterazione del metodo di Erone è data da

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0, \dots, M$$

Possiamo cambiare il criterio d'arresto per cercare di avere qualche informazione sulla bontà della approssimazione calcolata?

Criterio di arresto

Algoritmo: dato x_0 e fissato $M > 0$, l'iterazione del metodo di Erone è data da

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0, \dots, M$$

Possiamo cambiare il criterio d'arresto per cercare di avere qualche informazione sulla bontà della approssimazione calcolata?

Sfruttiamo le proprietà del metodo!

Proprietà del metodo di Erone

Algoritmo: dato x_0 e fissato $M > 0$, l'iterazione del metodo di Erone è data da

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k = 0, \ldots, M$$

Se $x_0 \geqslant \sqrt{a}$, il metodo di Erone gode delle seguenti proprietà

- tutti gli iterati x_k sono positivi
- $x_k > x_{k+1}$ per ogni $k \geqslant 0$
- $x_k \to \sqrt{a}$ per $k \to +\infty$
- $x_k - \sqrt{a} < \dfrac{x_0 - \sqrt{a}}{2^k}$
- $x_{k+1} - \sqrt{a} < x_k - x_{k+1}$

Giochiamo un po' col metodo di Erone

Divertiamoci col metodo di Erone!

Foglio di lavoro 2 (seconda parte)