# La convessità, ovvero il vigore dei rapporti incrementali (1)

(1) Vigore: energia vitale per cui gli organismi si sviluppano e prosperano

## INTRODUZIONE

*Un testo matematico non deve configurarsi soltanto*
*come una esposizione di tecniche e di procedure*
*senza pensiero e senza storia*
*Lucio Lombardo Radice*

L'entrata a pieno titolo della *convessita'* nella storia della Matematica e' di molto successiva alla nascita del calcolo differenziale.

*"Nonostante lo studio sistematico di quella nozione abbia avuto inizio alla fine del 1800, e' soltanto dalla meta' del 1900 che la convessita' e' divenuta una ben assestata area di ricerca in Matematica.*
*La convessita' e' uno stimolante oggetto di studio, per molte ragioni. I suoi concetti fondamentali sono naturali ed attraenti, mentre i prerequisiti che il suo studio richiede sono elementari, ed acquisibili anche a livello di scuola superiore. E non e' necessario percorrere molta strada nella sua teoria prima di incontrare significativi ed esteticamente gradevoli risultati"* ^(1).

Varie sono le motivazioni e le applicazioni, tanto teoriche quanto applicate, alla base dello sviluppo della teoria della convessita'. Indichiamo alcune delle piu' storicamente significative.

Il calcolo differenziale offre strumenti potenti per lo studio delle funzioni convesse di variabile reale, ma queste ultime, solo in quanto tali, possiedono una naturale differenziabilita' di tipo geometrico che le rendono derivabili, nel senso di Fermat, Leibnitz e Newton, "quasi in ogni punto" del loro dominio.

Nelle proprieta' isoperimetriche dei poligoni regolari, la convessita' gioca un ruolo fondamentale, nonostante Zenodoro, il loro scopritore, ne fosse del tutto inconsapevole.

Analoga inconsapevole presenza della convessita' vi e' tanto nella scoperta di Erone quanto in quella di Snell, che la riflessione da specchi piani e la rifrazione, rispettivamente, obbediscono alla legge del tempo di percorrenza *minimo.*

Newton invento' un *metodo iterativo* per la determinazione degli zeri di una funzione il quale richiede, per la sua *convergenza,* la convessita' della funzione in esame. Il metodo di Newton ha ispirato ed ispira moderni procedimenti iterativi per la soluzione numerica di problemi matematici

Il *centro di massa* di un qualunque corpo e' contenuto nell' *involucro convesso* del corpo stesso

Verso la fine del 1800 Gibbs e Maxwell svilupparono modelli matematici della termodinamica servendosi delle proprieta' di convessita' di funzioni reali di piu' variabili reali.

Le funzioni convesse, di una o piu' variabili reali, anche su domini non limitati, *sono dotate di minimo* se sono "infinite all'infinito " (la validita' della legge del minimo tempo di percorrenza per la riflessione e la rifrazione, accennata qui sopra, si fonda su questa proprieta')

Il XX problema, dell'elenco presentato da Hilbert al Congresso Internazionale di Matematica del 1900, e' stato completamente risolto a seguito della scoperta delle proprieta' di minimo delle *funzioni convesse* su domini *chiusi e convessi* degli spazi - oggi chiamati di Hilbert - infinito dimensionali.

L'esistenza del *cerchio osculatore* ad una curva, grafico di una funzione reale di una variabile reale, e' assicurata dalla convessita' della funzione stessa. Il numero reale reciproco del raggio del cerchio osculatore, e il centro del cerchio, sono, per definizione, rispettivamente la *curvatura* e il *centro di curvatura* della curva nel punto di tangenza fra la curva e la circonferenza del cerchio.
Un punto materiale che si muove sulla curva e' soggetto ad una *forza centripeta* proporzionale
alla curvatura.

Le celebri disuguaglianze fra le medie pitagoriche - cruciali in alcuni problemi isoperimetrici, ed in Statistica Matematica ) sono dirette conseguenze della *concavita'* della funzione *logaritmo naturale*.

Piu' in generale, la convessita' gioca un ruolo fondamentale nella moderna *teoria delle disuguaglianze*

---

(1) Brano tratto dalla Prefazione alla monografia' *Convexity,* di R. Webster, Oxford Science Publications (1994)

# Parte I

## La convessità

In tutto il seguito $I$ indicherà un intervallo aperto (non vuoto!) di $\mathbb{R}$

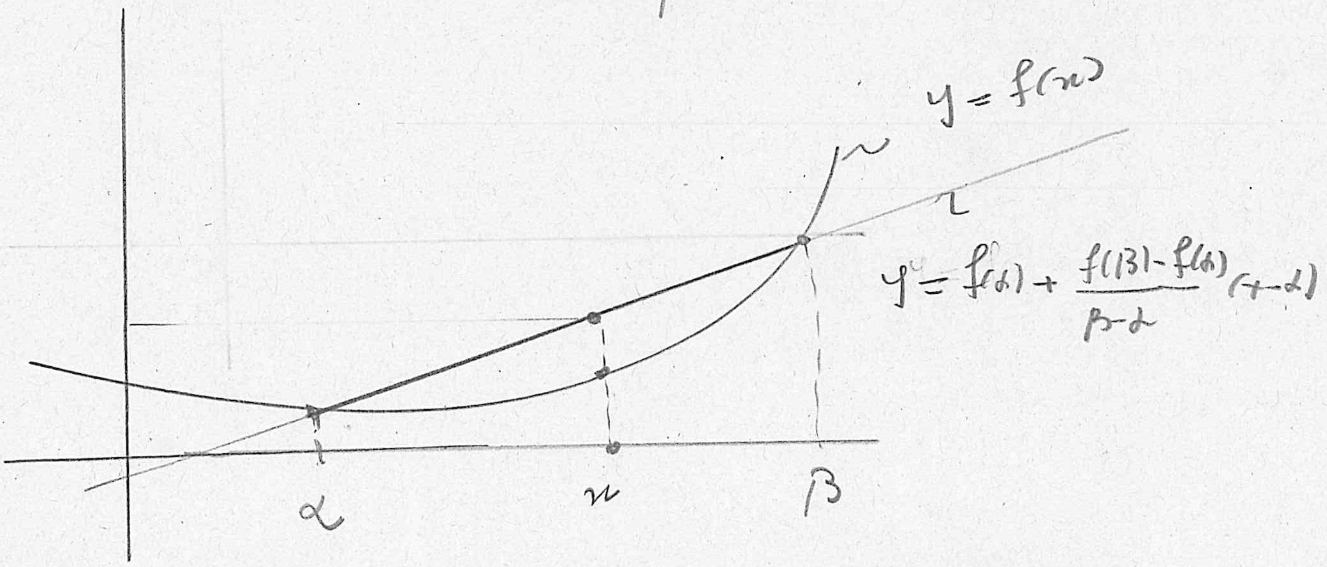
### 1.a. Convessità geometrica

Una funzione

$$f : I \to \mathbb{R}$$

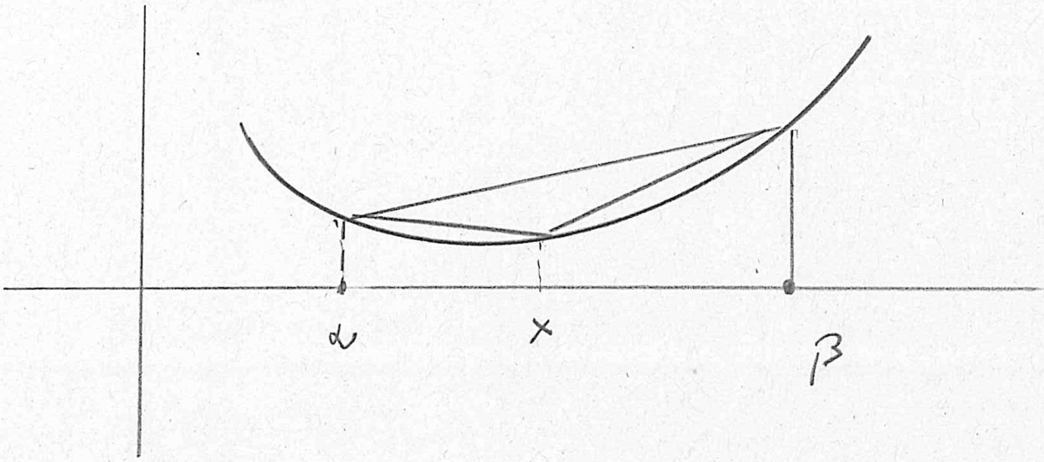
diremo che è geometricamente convessa su $I$ se per ogni $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha < \beta$, e per ogni $x \in ]\alpha, \beta[$ [(1)] risulta

$$(1) \quad f(x) \leq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$




(1) $]\alpha, \beta[ := \{ t \in \mathbb{R} \ / \ \alpha < t < \beta \}$

## 1.b Definizioni equivalenti




**Definizione** Se $a, b \in I$, $a \neq b$, poniamo

$$r(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Se $a<b$ chiameremo $r(a,b)$ valore medio di $f$ nell'intervallo $[a,b]$ [1]. Si noti che $r(a,b) = r(b,a)$.

**Proposizione 1** Le seguenti disuguaglianze sono fra loro equivalenti:

(1) $f(x) \leq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) \quad \forall : \alpha < x < \beta$

(2) $f(x) \leq f(\beta) + \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(x-\beta) \quad \forall : \alpha < x < \beta$

---

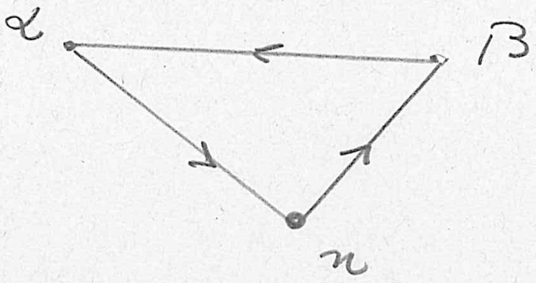
(1) $[a,b] := \{t \,/\, a \leq t \leq b\}$

(3) $\quad r(\alpha, x) \le r(\alpha, \beta) \quad \forall : \alpha < x < \beta$

(4) $\quad r(\alpha, \beta) \le r(x, \beta) \quad \forall : \alpha < x < \beta$

(5) $\quad r(\alpha, x) \le r(x, \beta) \quad \forall : \alpha < x < \beta$

(6) (Disuguaglianza ciclica)



$$f(\alpha)(x-\beta) + f(x)(\beta-\alpha) + f(\beta)(\alpha - x) \le 0$$
$$\forall : \alpha < x < \beta$$

<u>Dimostrazione</u> [FL] pagine 113-114

1.c <u>Jensen convessità</u>

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ diciamo che è <u>Jensen convessa</u> su I se per ogni $\alpha, \beta \in I$ e per ogni e per ogni <u>combinazione lineare convessa</u> di $\alpha, \beta$ :

$$t_1 \alpha + t_2 \beta$$

risulta

(7) $\quad f(t_1 \alpha + t_2 \beta) \le t_1 f(\alpha) + t_2 f(\beta)$

Precisiamo: Dire che

(8) $\qquad t_1\alpha + t_2\beta$

è una combinazione lineare convessa di $\alpha$ e $\beta$ significa dire che

$$0 \le t_1, t_2 \le 1 \,, \quad t_1 + t_2 = 1$$

Quindi la c.l.c. (combinazione lineare convessa) in (8) si può scrivere anche nei modi seguenti

$$t_1\alpha + (1-t_1)\beta \,, \quad 0 \le t_1 \le 1$$

$$(1-t_2)\alpha + t_2\beta \,, \quad 0 \le t_2 \le 1$$

$$\alpha + t_2(\beta-\alpha) \,, \quad 0 \le t_2 \le 1$$

$$\beta + t_1(\alpha-\beta) \,, \quad 0 \le t_1 \le 1$$

Proposizione 2 $\quad$ Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Allora

$$f \text{ è convessa} \iff f \text{ è Jensen convessa}$$

Dimostrazione. - [FL] pagina 115

## 1.d - Convessità tangenziale

Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ diciamo che è tangenzialmente convessa su $I$ se il suo grafico ha almeno una retta di appoggio in ogni punto $x_0 \in I$

Formalizziamo questa definizione:

Diciamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è tangenzialmente convessa (tg-convessa, brevemente) se per ogni punto $x_0 \in I$ esiste (almeno) un numero reale $m$ tale che

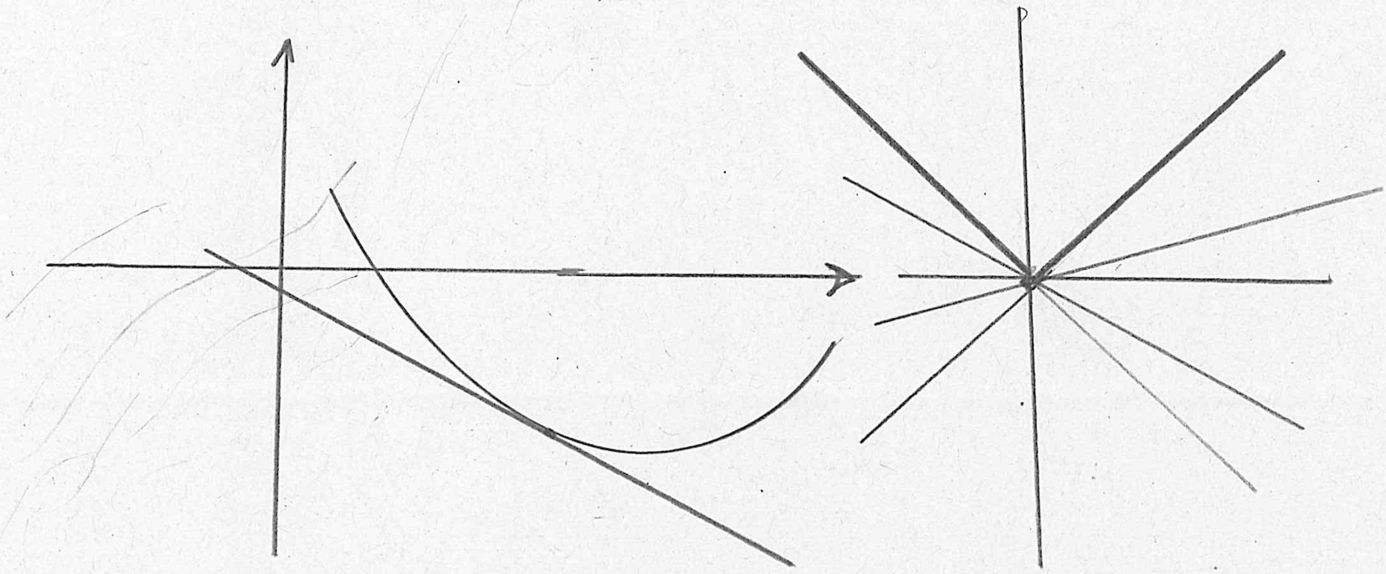
$$(g) \qquad f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in I$$

La retta di equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

diremo che è una retta di appoggio di $f$ nel punto $x_0$. Un numero reale $m$ come in (g) diremo che è una pendenza di $f$ in $x_0$.

Vogliamo esplicitamente sottolineare che una funzione può avere più di una pendenza in $x_0$



<u>Proposizione 3</u>. Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Allora

$f$ è geometricamente convessa

$$\Updownarrow$$

$f$ è tangenzialmente convessa

<u>Dimostrazione.</u> [FL] Proposizione 2.4 e Proposizione 2.5, pagine 121-122. #

Da ora in poi chiameremo semplicemente <u>convessa</u> una funzione <u>geometricamente</u>, <u>Jensen</u>, <u>tangenzialmente</u> convessa.

## 1.e. Funzioni concave

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice **concava** se la funzione

$$-f$$

è convessa.

Quindi una funzione $f$ è concava se e solo se essa verifica una qualsiasi delle disuguaglianze opposte delle

(1) – (6), (7), (9)

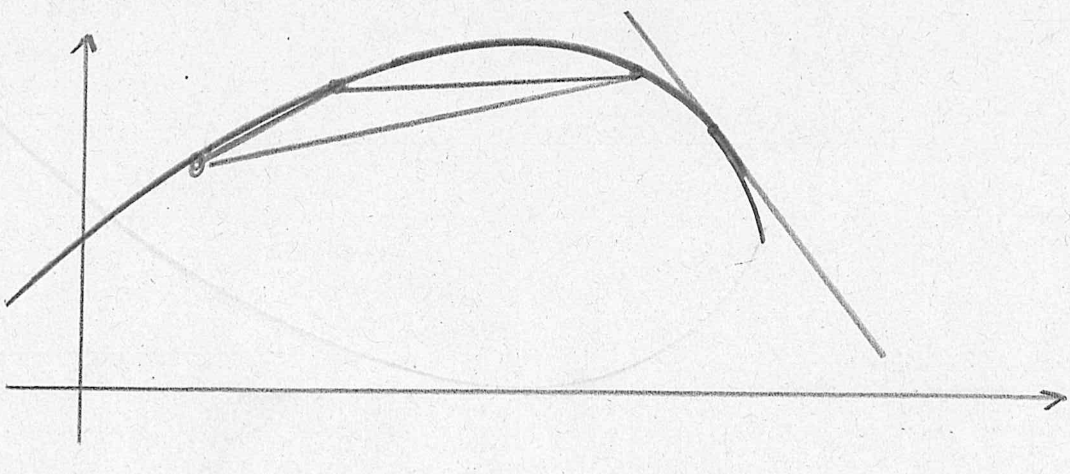
Come nel caso convesso, si parla di

concavità geometrica,

Jensen concavità,

concavità tangenziale,

tutte fra loro equivalenti.



## 1. f. Algebra delle funzioni convesse

Se $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni convesse allora

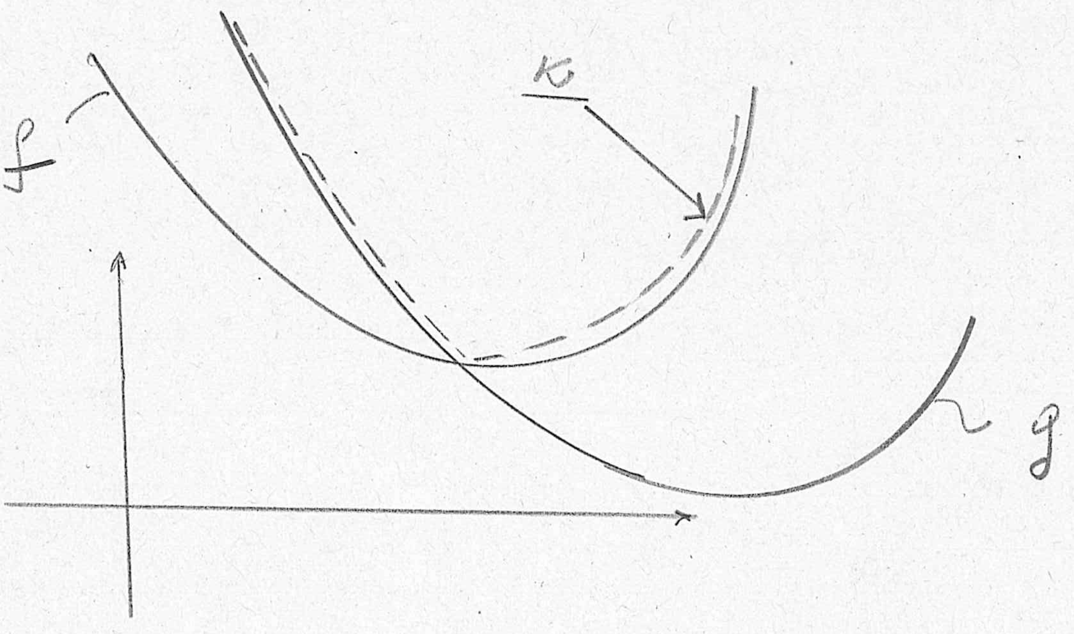
$$h := \lambda f + \mu g$$

è convessa, qualunque siano

$$\lambda, \mu \geq 0.$$

Risulta inoltre convessa anche la funzione

$$k := \max\{f, g\}$$



Per la dimostrazione di queste affermazioni si veda [FL] pagine 127 e 128.

## 1.g Criteri di convessità per le funzioni derivabili

Teorema 4 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $I$. Allora

$$f \text{ è convessa} \iff f' \nearrow \text{ (1)}$$

Dimostrazione ($\Longleftarrow$) Sia $f' \nearrow$. Dimostriamo che $f$ è convessa. Siano $\alpha, \beta, x \in I$, con $\alpha < x < \beta$. Occorre dimostrare che

$$r(\alpha, x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq$$

$$\leq r(x, \beta) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

Ora, per il Teorema del valore medio di Lagrange, esistono $z_1, z_2$, $\alpha < z_1 < x < z_2 < \beta$,

(1). Con $f'$ indichiamo la funzione $x \mapsto f'(x)$

tali che

$$r(\alpha, x) = f'(z_1) \quad , \quad r(x, \beta) = f'(z_2)$$

D'altra parte, essendo $z_1 < z_2$, per la monotonia crescente di $f'$, risulta

$$f'(z_1) \leq f'(z_2).$$

Di conseguenza

$$r(\alpha, x) = f'(z_1) \leq f'(z_2) = r(x, \beta)$$

onde

$$r(\alpha, x) \leq r(x, \beta)$$

($\Longrightarrow$) Supponiamo $f$ convessa. Dimostriamo che $f'$ è monotona crescente. Siano $\alpha, \beta$ due arbitrari punti di $I$ con $\alpha < \beta$. Dobbiamo dimostrare che

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta).$$

Siano $x, y \in I$ tali che

$$\alpha < x < y < \beta.$$

Essendo $f$ convessa, i suoi valori medi sono crescenti, onde

$$r(\alpha, x) \leq r(x, y) \leq r(y, \beta)$$

da cui segue $r(\alpha, x) \leq r(y, \beta)$.

Da questa segue

$$f'(\alpha) = \lim_{x \downarrow \alpha} r(\alpha, x) \leq r(y, \beta)$$

i.e.,

$$f'(\alpha) \leq r(y, \beta) \quad \forall y : \alpha < y < \beta .$$

Da queste segue

$$f'(\alpha) \leq \lim_{y \uparrow \beta} r(y, \beta) = f'(\beta)$$

e quindi $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, come si doveva dimostrare. #

<u>Corollario 5</u> Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in ogni punto di $I$.

Allora

$$f \text{ è convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

<u>Dimostrazione.</u> Basta osservare che risulta

$$f \text{ convessa} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema 4}}}{\iff} f' \nearrow \iff f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I.$$

Corollario 6 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $I$. Allora $f$ è convessa se e solo se

$$(10) \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$$

Inoltre $f'(x_0)$ è l'unica pendenza di $f$ in $x_0$

Dimostrazione Anzitutto, dalla (10), segue che $f$ è tangenzialmente convessa (e quindi convessa tout-court) e che $f'(x_0)$ è una sua pendenza in $x_0$.

Viceversa, supponiamo $f$ convessa e, fissato $x_0 \in I$, sia $m$ una pendenza di $f$ in $x_0$. Allora

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \quad \forall x \in I$$

Questa implica

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m \quad \forall x \in I, \ \underline{x > x_0}$$

e

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m \quad \forall x \in I, \ \underline{x < x_0}$$

Per la derivabilità di $f$ in $x_0$, dalla prima si trae

$$f'(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m,$$

e, dalla seconda,

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m.$$

Dunque $f'(x_0) = m$, i.e.,

$f'(x_0)$ è l'unica pendenza di $f$ in $x_0$.

In particolare, di conseguenza, vale la (10).

Questo completa la dimostrazione. #

NOTA Il Teorema 4, ed i suoi Corollari, si estendono in modo ovvio, e con ovvie modifiche nelle loro formulazioni, alle funzioni concave.

Esempio 7. (Disuguaglianza di Bernoulli)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x > -1$, vale la seguente disuguaglianza

$$(11) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dimostrazione La funzione $f(x) = (1+x)^n$

è convessa sull'intervallo $]-1, +\infty[$ in quanto

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} > 0 \quad \forall x > -1$$

Allora, in particolare

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x \quad \forall x > -1$$

Questa è esattamente la (11), in quanto $f(x) = (1+x)^n$,

$$f(0) = (1+x)^n \Big|_{x=0} = 1$$

e

$$f'(0) = n(1+x)^{n-1} \Big|_{x=0} = n$$

#

Esempio 8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e per ogni $x > 0$ vale la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{1}{n}(x-1) . \tag{12}$$

Dimostrazione. La funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è concava sull'intervallo $]0, +\infty[$, in quanto

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

onde

$$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) x^{\frac{1}{n}-2} < 0 \quad \forall x > 0$$

Allora, in particolare,

$$f(x) \le f(1) + f'(1)(x-1) \quad \forall x>0$$

Questa è esattamente la (12) in quanto

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ , $f(1)=1$ , $f'(1)=\frac{1}{n}$.

#

<u>NOTA</u> Se $x>1$, dalla (12) si trova

$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \sqrt[n]{x} & < & 1+\frac{(x-1)}{n} \\ \downarrow & \Longrightarrow & \downarrow & \Longleftarrow & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array} \qquad \text{per } n\to\infty$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad \forall x>1.$$

Ne viene che anche

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad \forall x: 0<x<1$$

in quanto, in questo caso, $\frac{1}{x}>1$ ed allora $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} \to 1$ per $n\to\infty$, il che implica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1$$

#

# Parte II

## Proprietà di regolarità delle funzioni convesse

Anche in questa seconda parte con $I$ indicheremo sempre un intervallo <u>aperto</u> (non vuoto) di $\mathbb{R}$.

### 2.a <u>Continuità delle funzioni convesse</u>

Lo scopo di questo paragrafo è la dimostrazione della <u>continuità</u> di <u>ogni funzione convessa</u>.

Questa segue dal prossimo lemma il quale mostra una proprietà delle funzioni convesse molto più forte della semplice continuità

<u>Lemma 1</u> Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano $a, b \in I$, $a < b$.
Allora esiste una costante reale $L$, dipendente da $f$, $a$ e $b$, tale che

$$(1) \qquad \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq L$$

per ogni $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$.[1]

<u>Dimostrazione</u>. Poiché $I$ è aperto, esistono $\alpha, \beta \in I$ tali che

$$\alpha < a \quad e \quad \beta > b$$

Dimostriamo la (1) supponendo, per fissare le idee $x<y$. Quindi abbiamo

$$\alpha < a \leq x < y \leq b < \beta$$

Poiché $f$ è convessa, i suoi valori medi sono crescenti e quindi

$$r(\alpha, a) \leq r(x,y) \leq r(b, \beta).$$

In altri termini, posto

$$L_1 = r(\alpha, a) \quad e \quad L_2 = r(b, \beta),$$

si ha

$$L_1 \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq L_2$$

Da questa, ponendo $L := \max\{L_2, -L_1\}$,

---

[1] Questa proprietà di $f$ si esprime anche dicendo che $f$ è <u>Lipschitziana</u> in $[a,b]$

si trova

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$$

e quindi la (1). #

Questo lemma implica immediatamente il seguente teorema

<u>Teorema 2.</u> Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora $f$ è continua in ogni punto di $I$.

<u>Dimostrazione.</u> Sia $x \in I$ fissato ad arbitrio e scegliamo $a$ e $b$ in $I$ tali che $a < x < b$. Per il Lemma precedente esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq L |y - x| \quad \forall y \in [a, b]$$

Da questa disuguaglianza segue

$$\lim_{y \to x} |f(y) - f(x)| = 0$$

e quindi

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x).$$

Questo dimostra che $f$ è continua in $x_0$ e conclude la dimostrazione. #

## 2.6 Semiderivabilità delle funzioni convesse

La funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=|x|$$

è convessa, essendo

$$f(x)=\max\{x,-x\}$$

ed essendo $x\mapsto x$ e $x\mapsto -x$ funzioni convesse[1]. Qui stiamo usando il fatto che il massimo di due funzioni convesse è una funzione convessa (si veda PI, § 1.f pagina PI/7).

La funzione $f$ non è derivabile nel punto $x=0$. Tuttavia esistono, in $x=0$, la derivata a destra e la derivata a sinistra. Questo non è casuale.

---

(1) Le funzioni $x\mapsto x$ e $x\mapsto -x$ sono due volte derivabili con derivate seconde identicamente nulle.

Vale infatti il seguente teorema

<u>Teorema 3.</u> Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora per ogni $x_0 \in I$ esistono

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left( \lim_{x \to x_0+} \cdot \right)$$

e

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left( \lim_{x \to x_0-} \cdot \right)$$

Inoltre

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$$

<u>Dimostrazione</u> Per la convessità di $f$ la funzione

$$x \longmapsto r(x_0, x)$$

è monotona crescente su $I$. Esistono allora

$$\lim_{x \downarrow x_0} r(x_0, x) \quad e \quad \lim_{x \nearrow x_0} r(x_0, x_0)$$

Questi due limiti sono, rispettivamente,

$$f'_+(x_0) \quad e \quad f'_-(x_0).$$

Essendo poi

$$\lim_{x \downarrow x_0} r(x_0,x) = \inf_{x > x_0} r(x_0,x)$$

e

$$\lim_{x \nearrow x_0} r(x_0,x) = \sup_{x < x_0} r(x_0,x)$$

ed inoltre

$$r(x_0,y) < r(x_0,z) \quad \forall : \quad y < x_0 < z$$

si ha

$$f'_-(x_0) = \sup_{y<x_0} r(x_0,x)$$

$$\leq \inf_{z > x_0} r(x_0,z) = f'_+(x_0)$$

Con questo la dimostrazione è conclusa.

#

Le "semiderivate" $f'_+$ e $f'_-$ caratterizzano tutte le pendenze di $f$, nel senso del teorema seguente.

**Teorema 4** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in I$. Sia poi $m \in \mathbb{R}$. Allora

$$m \text{ è una pendenza di } m \text{ in } x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$$

**Dimostrazione** ($\Rightarrow$) Sia $m$ una pendenza di $m$ in $x_0$. Allora, per definizione,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \quad \forall x, y \in I,\ x < x_0 < y.$$

Da queste segue

$$f'_-(x_0) := \sup_{I \ni x < x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m$$

$$\leq \inf_{I \ni y > x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} =: f'_+(x_0)$$

Onde $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$.

($\Leftarrow$) Sia $m \in \mathbb{R}$ tale che $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$

Poiché

$$f'_-(x_0) = \sup_{I \ni x < x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

e

$$f'_+(x_0) = \inf_{I \ni y > x_0} \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0},$$

risulta

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'_-(x_0) \leq m$$

$$\leq f'_+(x_0) \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

per ogni $x, y \in I$, $x < x_0 < y$.

Pertanto

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \quad \forall x, y \in I, x < x_0 < y.$$

Questo dimostra che $m$ è una pendenza di $f$ in $x_0$.

La dimostrazione è completa. #

<u>Corollario 5</u>. Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in I$. Allora $f$ ha una <u>unica</u> pendenza in $x_0$ se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$.

In questo caso $m := f'(x_0)$ è l'unica pendenza di $f$ in $x_0$ e $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Dimostrazione. Per il precedente Teorema $m \in \mathbb{R}$ è una pendenza di $f$ in $x_0$ se e solo se

$$f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$$

Quindi la pendenza è unica se e solo se

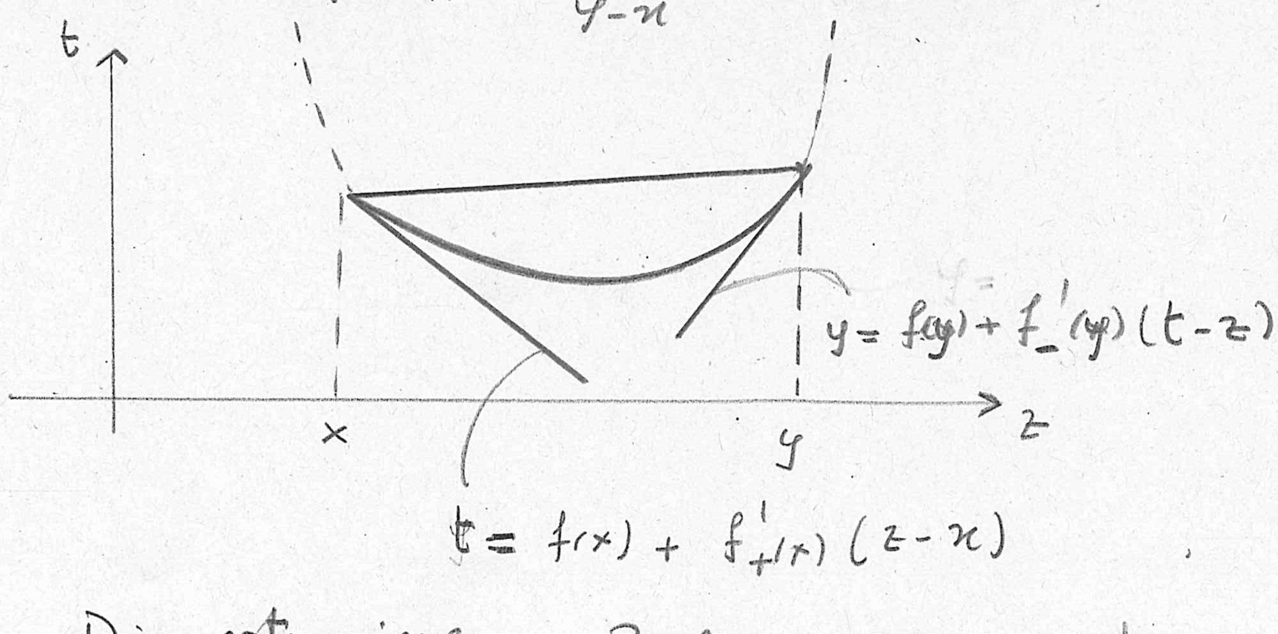
$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

i.e., se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$, nel qual caso si ha

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = m \quad \#$$

Corollario 6.- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano $x, y \in I$, $x < y$. Allora

$$(2) \qquad f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y)$$




Dimostrazione. Basta osservare che

$$f'_+(x) = \inf_{y > x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

e che
$$f'_-(y) = \sup_{x<y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$
#

<u>NOTA.-</u> Sottolineamo esplicitamente che dalle (2) segue

(3) $\quad f'_+(x) \leq f'_-(y) \quad \forall\, x, y \in I,\ x<y.$

Abbiamo quindi la seguente sequenza di disuguaglianze:
$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$
per ogni $x, y \in I$, $x<y$.

Da questa segue che le funzioni
$$x \mapsto f'_-(x) \quad e \quad x \mapsto f'_+(y)$$
sono entrambe monotone crescenti. #

Useremo queste proprietà nella dimostrazione della seguente preposizione.

<u>Proposizione 7.</u>- Sia $f: I \longrightarrow R$ una funzione convessa, e sia $x_0 \in I$. Le

seguenti affermazioni sono fra loro equivalenti:

(i) la funzione $x \mapsto f'_-(x)$ è continua in $x_0$;

(ii) la funzione $x \mapsto f'_+(x)$ è continua in $x_0$;

(iii) $f$ è derivabile in $x_0$.

Dimostrazione.- (i) $\Rightarrow$ (iii) Per ogni $y \in I$, $y > x_0$, si ha

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(y)$$

Da queste diseguaglianze, passando al limite per $y \to x_0+$, si trae

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq \lim_{y \downarrow x_0} f'_-(y)$$

$$= (f'_- \text{ è continua in } x_0)\ f'_-(x_0)$$

onde

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$$

e quindi

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0),$$

i.e., $f$ è derivabile in $x_0$.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>. Si dimostra come la precedente, usando le disuguaglianze

$$f'_+(x_0) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y), \quad y \in I, \; y < x_0.$$

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i)</u> Ragioniamo per assurdo e supponiamo $f'_-$ non continua in $x_0$. Allora, essendo $f'_- \nearrow$, essa avrà un salto in $x_0$. Precisamente: esistono $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, con $m_1 < m_2$, tali che

$$f'_-(z) \leq m_1 \quad \forall z \in I, \; z < x_0$$

e

$$m_2 \leq f'_-(z) \quad \forall z \in I, \; z > x_0.$$

Allora, poichè le semiderivate $f'_-(z)$ sono pendenze, si ha

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq f'_-(z) \leq m_1 \quad \text{per } x < z < x_0$$

e

$$m_2 \leq f'_-(z) \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \quad \text{per } x_0 < z < x$$

Da queste, passando al limite per $z \to x_0$ (da sinistra e da destra, rispettivamente) e ricordando che $f$, in quanto convessa, è continua, si trova

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m_1 \qquad \text{per } x \in I,\ x < x_0$$

e

$$m_2 \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{per } x \in I,\ x > x_0$$

Ed ora, passando al limite per $x \to x_0$ (da sinistra e da destra, rispettivamente) e ricordando che stiamo ammettendo $f$ derivabile in $x_0$, da queste si ottiene

$$f'(x_0) \leq m_1 < m_2 \leq f'(x_0)$$

onde

$$f'(x_0) < f'(x_0)$$

Questa contraddizione prova che (iiv) $\Rightarrow$ (i).

<u>(iii) $\Rightarrow$ (ii)</u>. Si dimostra come la precedente.

Conclusione: abbiamo dimostrato il seguente diagramma di implicazioni

$$(i) \iff (iii) \iff (ii).$$

Possiamo quindi ritenere conclusa la dimostrazione della Proposizione.

//

<u>Corollario 8</u>. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora $f$ è derivabile in tutti i punti di $I$ tranne al più in un insieme finito o numerabile, i.e., esiste $A \in I$, $A$ finito o numerabile, tale che $f$ è derivabile in $I \setminus A$ con

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) \quad \forall x \in I \setminus A$$

<u>Dimostrazione</u> Siano

$$A_- := \{x \in I \,/\, f'_- \text{ non è continua in } x\}$$

e

$$A_+ := \{x \in I \,/\, f'_+ \text{ non è continua in } x\}$$

Poichè $x \mapsto f'_-(x)$ e $x \mapsto f'_+(x)$ sono funzioni monotone, per una proprietà generale delle funzioni monotone, gli insiemi $A_-$ e $A_+$ sono finiti o, al più, numerabili.

Quindi, in particolare, in ogni punto di $I \setminus A_-$ la funzione $f'_-$ è continua. Di conseguenza, per la Proposizione 7, $f$ è derivabile in ogni punto di $A$. Dal Corollario 5 risulta poi

$$f'(x) = f'_-(x) \quad \forall x \in I \setminus A_-$$

Analogamente, si riconosce che $f$ è derivabile in ogni punto di $I \setminus A_+$ con

$$f'(x) = f'_+(x) \quad \forall x \in I \setminus A_+.$$

Questo dimostra il Corollario, con $A = A_-$ e/o $A = A_+$. #

<u>NOTA</u> Se $x \in A_-$ allora $f$ è derivabile in $x$, quindi $f^+$ è continua in $x$, quindi $x \in A_+$, quindi $A_- \subseteq A_+$. Analogamente $A_+ \subseteq A_-$. Conclusione $A_- = A_+$ #

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa allora $f'_-$ e $f'_+$ sono funzioni monotone e, quindi, integrabili su ogni intervallo compatto $[a,b]$ contenuto in $I$.

In generale, tuttavia, $f$ non è una primitiva né di $f'_-$ né di $f'_+$, perché

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) \quad \forall x \in I \setminus A$$

e $A$ potrebbe non essere vuoto, come succede, ad esempio, nel caso banale della funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Vale tuttavia la seguente proposizione

<u>Proposizione 9</u>.- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $[a,b] \subseteq I$. Allora

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'_-(x)\,dx = \int_a^b f'_+(x)\,dx$$

**Dimostrazione** (Utilizzeremo le notazioni delle "Lezioni di Analisi Matematica I", Cap. 6, §9) Sia

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

una scomposizione di $[a,b]$. Quindi:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

e scriviamo $f(b)-f(a)$ come $\sigma$-somma telescopica:

$$f(b)-f(a) = f(x_n) - f(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left( f(x_k) - f(x_{k-1}) \right)$$

Ora, per il Corollario 6,

$$f'_+(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_-(x_k)$$

e quindi

$$f(b)-f(a) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_-(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

e

$$f(b)-f(a) \geq \sum_{k=1}^{n} f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

Da queste disuguaglianze si trae

$$s(f'_+, \sigma) \leq f(b)-f(a) \leq S(f'_-, \sigma)$$

per ogni scomposizione $\sigma$ di $[a,b]$.

Di conseguenza, poiché $f'_-$ e $f'_+$ sono integrabili, si ha:

$$\int_a^b f'_+(x)dx = \sup_\sigma s(f'_+, \sigma) \leq$$

$$\leq f(b)-f(a) \leq$$

$$\leq \inf_\sigma S(f'_-, \sigma) = \int_a^b f'_-(x)dx,$$

Onde

$$(4) \quad \int_a^b f'_+(x)dx \leq f(b)-f(a) \leq \int_a^b f'_-(x)dx.$$

D'altra parte, essendo $f'_- \leq f'_+$, si ha

$$(5) \quad \int_a^b f'_-(x)dx \leq \int_a^b f'_+(x)dx$$

Le disuguaglianze (4) e (5) sono compatibili se e solo se

$$\int_a^b f'_-(x)\,dx = f(b) - f(a) = \int_a^b f'_+(x)\,dx \quad \#$$

Il classico criterio di monotonia del calcolo infinitesimale ha la seguente naturale versione per le funzioni convesse.

<u>Proposizione 10</u>. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora

(i) $f \nearrow$ su $I \iff f'_+(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$;

(ii) $f \downarrow$ su $I \iff f'_-(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

<u>Dimostrazione</u> (i) Se $f \uparrow$ allora

$$0 \leq \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} \quad \forall x, \alpha \in I, \; x < \alpha$$

Di conseguenza

$$f'_+(x) = \lim_{\alpha \downarrow x} \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} \geq 0 \quad \forall x \in I$$

Viceversa, supponiamo $f'_+ \geq 0$ in ogni punto di $I$ e siano $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha < \beta$. Allora, per il Corollario 6 a pagina PII/11, si ha

$$f'_+(\alpha) \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Poiché $f'_+(\alpha) \ge 0$ da questa segue

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \ge 0 \quad \forall \alpha, \beta \in I, \ \alpha < \beta.$$

Questa implica

$$f(\alpha) \le f(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in I, \ \alpha < \beta.$$

i.e. la monotonia crescente di $f$.

(ii) Si dimostra con argomenti del tutto analoghi ai precedenti. #

Il precedente criterio di monotonia su intervalli aperti si estende facilmente agli intervalli chiusi.

<u>Corollario 11</u>.- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano $a, b \in I$ con $a < b$. Allora

(i) $f \nearrow$ in $[a,b] \iff f'_+(x) \ge 0 \ \forall x \in ]a,b[$

(ii) $f \downarrow$ in $[a,b] \iff f'_-(x) \le 0 \ \forall x \in ]a,b[$

<u>Dimostrazione</u> segue facilmente dalla Proposizione 10 e dalla continuità di $f$, in particolare nei punti $a$ e $b$.

Concludiamo questa Parte II con quella che vien sempre citata come

<u>disuguaglianza di Jensen</u>,

una naturale iterazione della (7), Parte I, pagina 3.

<u>Proposizione 12</u>. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I.$$

Allora

$$(6) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n}{}' t_i \alpha_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}{}' t_i f(\alpha_i)$$

per ogni combinazione lineare convessa

$$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_n\alpha_n$$

dei punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

<u>Dimostrazione</u>. La (6), nel caso $n = 2$, è esattamente la (7) della Parte I.

Dimostriamola nel caso $n = 3$.

Siano dunque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I$ e sia

$$t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3$$

una loro combinazione lineare convessa.
Dobbiamo dimostrare che

(7) $$f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3) \le$$

$$\le t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + t_3 f(\alpha_3).$$

~~Eventualmente rinumerando le $\alpha_i$, possiamo supporre $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$.~~

Possiamo ~~[illegible]~~ supporre $0 < t_3 < 1$ perché, se fosse $t_3 = 0$, ricadremmo nel caso $n = 2$, mentre se fosse $t_3 = 1$ sarebbe $t_1 = t_2 = 0$ e la (7) sarebbe banale.

Con queste premesse, procediamo così: poiché $t_1 + t_2 = 1 - t_3 \in \,]0,1[$, si ha

$$f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3) =$$

$$= f\left((t_1+t_2)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\alpha_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\alpha_3\right) + t_3\alpha_3\right)$$

$= \Big($ ponendo $\tau = t_1 + t_2$, e

$$\beta_1 = \frac{t_1}{t_1+t_2}\alpha_2 \,, \quad \beta_2 = \frac{t_2}{t_1+\alpha_2}\alpha_2 \,,$$

e

$$\beta = \frac{t_1}{t_1+t_2}\alpha_2 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\alpha_2 \Big)$$

$$f(\tau\beta + (1-\tau)\alpha_3)$$

$\le \big($ $\tau\beta + (1-\tau)\alpha_3$ è una c.l.c. di $\beta, \alpha_3 \in I$, e vale la (6) per $n=2 \big)$

$$\tau f(\beta) + (1-\tau) f(\alpha_3)$$

$\le \big($ $\beta$ è una c.l.c. di $\alpha_1, \alpha_2$, e vale la (6) per $n = 2 \big)$

$$\tau\left(\frac{t_1}{t_1+t_2} f(\alpha_1) + \frac{t_2}{t_1+t_2} f(\alpha_2)\right) + (1-\tau) f(\alpha_3)$$

$$= t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + t_3 f(\alpha_3)$$

Abbiamo così dimostrato la (6) nel caso $n = 3$, supponendola vera nel caso $n = 2$.

In modo del tutto analogo, si dimostra che la (6) è vera nel caso $n = 4$, sapendo che essa è vera per ogni $n \leq 3$. In generale, si dimostra che la (6) è vera per $n = p+1$, supponendola vera per $n \leq p$.
Conclusione: per induzione, la (6) è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

#

# Parte III

## Punti estremali di una funzione convessa

Come nelle parti precedenti anche in questa con $I$ indicheremo sempre un intervallo aperto (e non vuoto) di $\mathbb{R}$.

In questa Parte III mostreremo alcune proprietà cruciali dei punti estremanti relativi di una funzione convessa.

Da queste, come vedremo, seguiranno alcuni teoremi fondamentali sulla minimizzazione delle funzioni convesse.

Proposizione 1 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in I$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $f(x_0) = \min_I f$

(ii) $f$ ha in $x_0$ almeno una pendenza $m = 0$

(iii) $f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$

Dimostrazione. ((i) $\Rightarrow$ (ii)). Se $f(x_0) = \min_I f$

allora

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

Questo prova che risulta

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \quad \forall x \in I$$

se $m=0$. Quindi $m=0$ è una pendenza di $f$ in $x_0$

((ii) $\Rightarrow$ (i)) Se $m=0$ è una pendenza di $f$ in $x_0$ allora

$$f(x) \geq f(x_0) + 0\cdot(x-x_0) = f(x_0) \quad \forall x \in I$$

e quindi

$$f(x_0) = \min_I f$$

((ii) $\Leftrightarrow$ (iii)) Poiché $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$ se e solo se $m$ è una pendenza di $f$ in $x_0$ allora $f$ ha almeno una pendenza nulla in $x_0$ se e solo se

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0). \quad \#$$

Proposizione 2. Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in I$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $x_0$ è un punto di minimo locale

(ii) $f(x_0) = \min_I f$

<u>Dimostrazione</u> L'implicazione ((ii) ⇒ (i)) è, ovviamente, vera. Dimostriamo quella inversa. Sia $x_0$ un punto di minimo locale di $f$. Allora esistono $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha < x_0 < \beta$, tali che

$$(1) \qquad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Questo implica (Cfr. Corollario 6, Parte II, pagina 11)

$$f'_+(\alpha) \leq \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} \quad \forall x \in I, x > \alpha$$

e quindi, essendo $f(x_0) - f(\alpha) \leq 0$ e $x_0 - \alpha > 0$

$$f'_+(\alpha) \leq 0$$

Analogamente si riconosce che

$$f'_-(\beta) \geq 0.$$

Allora, essendo le semiderivate pendenze di $f$, si ha

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'_+(\alpha)(x - \alpha) \geq f(\alpha) \quad \forall x \in I, x \leq \alpha$$

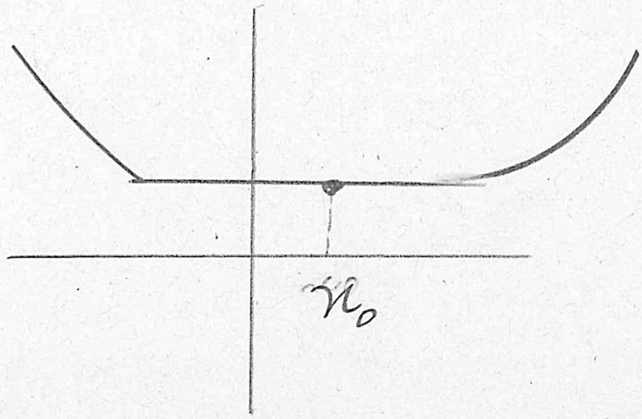
e

$$f(x) \geq f(\beta) + f'_-(\beta)(x - \beta) \geq f(\beta) \quad \forall x \in I, x \geq \beta$$

Da queste e dalla (1) si trae

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I.$$

<u>Proposizione 3.-</u> Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in I$. Se $f$ ha in $x_0$ un punto di massimo relativo, allora $f$ è costante in un intorno di $x_0$




<u>Dimostrazione</u> Siano $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha < x_0 < \beta$, tali che

$$(2) \qquad f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Sia $m \in \mathbb{R}$ una pendenza di $f$ in $x_0$.
Allora

$$f(x_0) \geq f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Questo implica

$$(3) \qquad m(x - x_0) \leq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Se $\alpha < x < x_0$, da questa si trae

$$m \geq 0$$

mentre, se $x_0 < x < \beta$, la (3) implica $m \leq 0$.

Quindi deve essere $m = 0$. Resta così dimostrato che ogni pendenza di $f$ in $x_0$ è uguale a zero. Ne segue, per la Proposizione 2, che $f(x_0) = \min_I f$. Pertanto

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

Da questa, e dalla (2), segue

$$f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

#

Dalla dimostrazione appena conclusa risulta quanto segue.

Corollario 4.- Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $J$ un sotto intervallo aperto di $I$. Se esiste un punto $x_0 \in J$ tale che

$$f(x_0) = \max_J f$$

allora

$$f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in J.$$

In particolare, se $f$ ha minimo in $I$, allora

$$f = \text{costante in } I. \quad (1)$$

#

(1) Un risultato come questo viene citato come principio di massimo forte

NOTA Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano $a, b \in I$ tali che $a < b$. Allora, dalla definizione di convessità geometrica segue subito che

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\} \quad \forall x \in [a,b]$$

Quindi

$$\max_{[a,b]} f = \max\{f(a), f(b)\}$$

Il precedente corollario afferma che, se $f$ assume il minimo in un punto interno di $[a,b]$, allora $f \equiv$ costante in $[a,b]$. #

Il teorema seguente stabilisce una delle proprietà più importanti delle funzioni convesse ed ha un ruolo fondamentale nei problemi di minimizzazione.

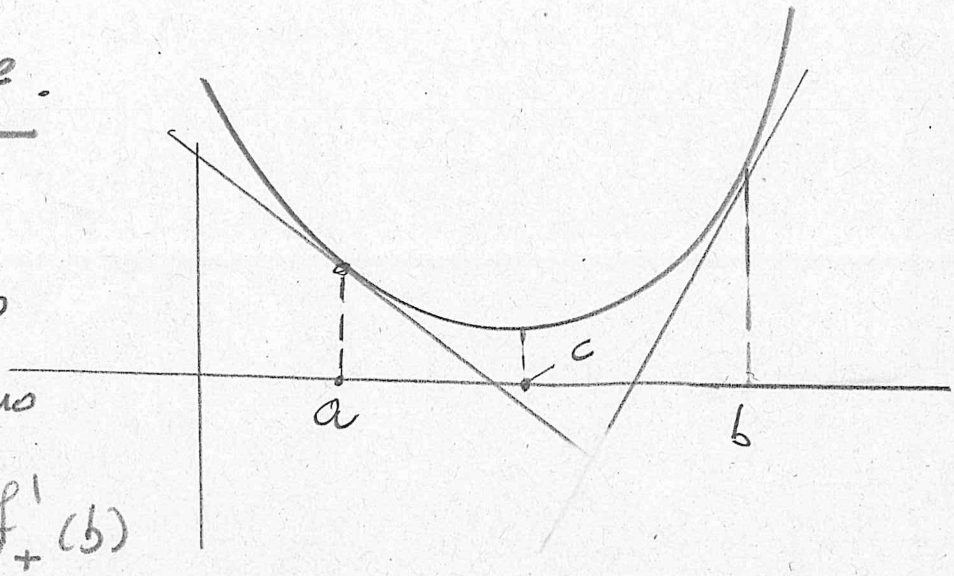
Teorema 12 Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e siano $a, b \in I$ tali che

$$a < b \quad e \quad f'_-(a) \leq 0, \; f'_+(b) \geq 0$$

Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \min_{I} f .$$

## Dimostrazione.




Se fosse $f'_-(b) \leq 0$ allora avremmo

$$f'_-(b) \leq 0 \leq f'_+(b)$$

e quindi $m=0$ sarebbe una pendenza di $f$ in $b$ (Teorema 4, P/II, pagina PII/13). Ne verrebbe, per la Proposizione 1, pagina PIII/1,

$$f(b) = \min_{I} f .$$

In questo caso, quindi, il Teorema sarebbe dimostrato. Possiamo quindi limitarci a supporre $f'_-(b) > 0$.

Poniamo

$$A = \{ x \in [a, b] \, / \, f'_-(x) \leq 0 \}.$$

Poiché $f'_-(a) \leq 0$ per ipotesi $a \in A$ onde

$$A \neq \emptyset$$

Essendo poi $A \subseteq [a, b]$ esso è superiormente limitato. Per la completezza di $\mathbb{R}$ esiste

$c \in [a, b]$ tale che

$$c = \sup A.$$

Dalla definizione di $A$ e dalla monotonia crescente di $f'_-$, si ha

$$f'_-(x) \leq 0 \quad \forall x \in I, \, x < c$$

e

$$f'_-(x) > 0 \quad \forall x \in I, \, x > c.$$

Per i criteri di monotonia della Proposizione 10 e del Corollario 11 alle pagine PII/21 e PII/22, si ha

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I, \, x \leq c$$

e

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in I, \, x \geq c.$$

Questo dimostra che

$$f(c) = \min_I f.$$

#

Un altro importante teorema sulla minimizzazione delle funzioni convesse è il seguente, al quale dobbiamo premettere una definizione.

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice

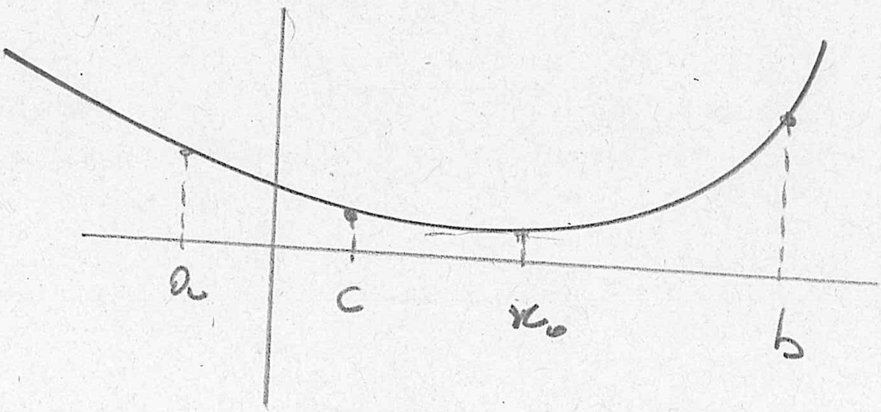
<u>coercive</u> se esistono $a, b, c \in I$ tali che

$$a < c < b \quad e \quad f(c) \leq \min\{f(a), f(b)\}$$

Vale il teorema seguente

<u>Teorema 13</u>. Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e coerciva allora esiste $x_0 \in I$ tale che

$$f(x_0) = \min_I f$$




<u>Dimostrazione</u>: Si ha

$$f'_-(a) \leq f'_+(a) \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq 0$$

e

$$f'_+(b) \geq \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \geq 0$$

Quindi $f$ verifica le ipotesi del

Teorema 12, onde esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$f(x_0) = \min_I f. \quad \#$$

Chiudiamo questa Parte III indicando alcuni esempi di applicazione delle proprietà estremali delle funzioni convesse.

<u>Esempio</u> 14. La legge di <u>riflessione</u> da specchi piani: Teorema di Erone (si veda [FL], Capitolo 8)

<u>Esempio</u> 15. La legge di Snell sulla <u>rifrazione</u>
(Si veda [FL], Capitolo 9)

<u>Esempio</u> 16. Il <u>problema del bagnino</u>, di Feynman
(Si veda [FL], Capitolo 9, Esercizio 6.3)

# Parte IV

## Stretta convessità

## Ottimizzazione delle disuguaglianze di Jensen

Come di consueto indicheremo sempre con $I$ un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

### 1.a Stretta convessità

Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ diremo che è strettamente convessa se per ogni $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$, risulta

(1) $$f(x) < f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \quad \forall x \in ]\alpha, \beta[$$

Come nella Parte I si riconosce che questa è equivalente alle seguenti, a loro volta equivalenti fra loro

(2) $$f(x) < f(\beta) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha) \quad \forall x \in ]\alpha, \beta[$$

(3) $$r(\alpha, x) < r(\alpha, \beta) \quad \forall: \alpha < x < \beta$$

(4) $$r(\alpha, \beta) < r(x, \beta) \quad \forall: \alpha < x < \beta$$

(5) $r(\alpha, x) < r(x, \beta) \quad \forall x: \alpha < x < \beta$

(6) (Jensen convessità stretta)

$$f(t_1\alpha + t_2\beta) < t_1 f(\alpha) + t_2 f(\beta)$$

per ogni $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$, e per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$0 < t_1, t_2 < 1 \; , \; t_1 + t_2 = 1$$

(7) (tangenziale convessità stretta)

Per ogni $x_0 \in I$ esiste una costante $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) > f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in I, x \neq x_0$$

Ovviamente, ogni funzione strettamente convessa è convessa. Il viceversa non vale, come si riconosce banalmente osservando che ogni funzione costante è convessa ma non strettamente convessa.

Tutti i risultati dimostrati per le funzioni convesse valgono, con le ovvie modifiche, anche per le funzioni strettamente convesse. Alcuni di questi risultati valgono in un senso forte.

A titolo di esempio, ne citiamo solo alcuni

- Se $f: I \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa ed $x_0 \in I$ è un punto di minimo di $f$ allora

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in I, \; x \neq x_0$$

Da qui segue, in particolare, che una funzione strettamente convessa ha, al più, un punto di minimo.

- Se $f: I \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa allora le funzioni semiderivate

$$f'_- \quad e \quad f'_+$$

sono strettamente crescenti

- Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $I$ allora:

$f$ è strettamente convessa

$$\Updownarrow$$

$f'$ è strettamente crescente

#

Una delle più interessanti proprietà delle stretta convessità è quella data dal seguente teorema, una iterazione della condizione (6)

Teorema 1 (Ottimalità della disuguaglianza di Jensen) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ punti di $I$. Se esiste una combinazione lineare convessa

$$t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 + \ldots + t_n \alpha_n,$$

con $0 < t_i < 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, tale che

$$(8) \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(\alpha_i)$$

allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

NOTA. Essendo $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, la (8) se è banalmente vera se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

<u>Dimostrazione</u> La (8), nel caso $n = 2$, discende direttamente dalla (6).

Dimostriamola nel caso $n = 3$.

Siano dunque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I$ e siano $t_1, t_2, t_3 \in \, ]0, 1[$, con $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, tali che

$$(9) \quad f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3) = t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + t_3 f(\alpha_3)$$

Dimostriamo che $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Procediamo come nella dimostrazione della disuguaglianza di Jensen, Proposizione 12, Parte II, pagina 23. Adottiamo anche le notazioni della pagina P II/25.

Per la convessità di $f$ si ha

$$(10) \quad f(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + t_3\alpha_3) \leq$$

$$\leq \tau f(\beta) + (1-\tau) f(\alpha_3) \leq$$

$$\leq t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2) + t_3 f(\alpha_3)$$

Poichè, per la (9), il primo e l'ultimo termine di queste disuguaglianze sono uguali, tutti i precedenti $\leq$ sono $=$.
In particolare, poichè $(1-\tau) = t_3$, deve essere

$$\tau f(\beta) = t_1 f(\alpha_1) + t_2 f(\alpha_2)$$

onde, essendo $\tau = t_1 + t_2$,

$$f(\beta) = \frac{t_1}{t_1+t_2} f(\alpha_1) + \frac{t_2}{t_1+t_2} f(\alpha_2)$$

od anche, ricordando chi è $\beta$,

$$f\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\alpha_2 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\beta_2\right) =$$

$$= \frac{t_1}{t_1+t_2} f(\alpha_2) + \frac{t_2}{t_1+t_2} f(\beta_1).$$

Questa, poichè l'affermazione del Teorema è vera per $n=2$, implica

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Allora, dalla (9) si trova

$$f((t_1+t_2)\alpha_2 + t_3\alpha_3) =$$
$$= (t_1+t_2) f(\alpha_2) + t_3 f(\alpha_3)$$

e da questa, poiché l'affermazione del Teorema è vera per $n=2$, segue

$$\alpha_1 = \alpha_3 .$$

In definitiva

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

e l'affermazione del Teorema è vera anche per $n=3$.

Allo stesso modo, supponendo l'affermazione del Teorema vera per ogni $n \leq p$, si dimostra che è vera per $n = p+1$.

Così, per il principio di induzione, l'affermazione del Teorema risulta vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. #

## 1. b Alcuni esempi di applicazione

**Esempio 2** Medie pitagoriche e loro confronti.

Si veda [FL] pagine 147 - 149, 152 - 143

**Esempio 3.** Disuguaglianza isoperimetrica per i triangoli

Si veda [FL] pagine 153 - 154

**Esempio 4.-** Disuguaglianza isoperimetrica per i quadrilateri

Si veda [FL] pagine 154 - 155

**Esempio 5.-** Proprietà isoperimetrica dei cubi.

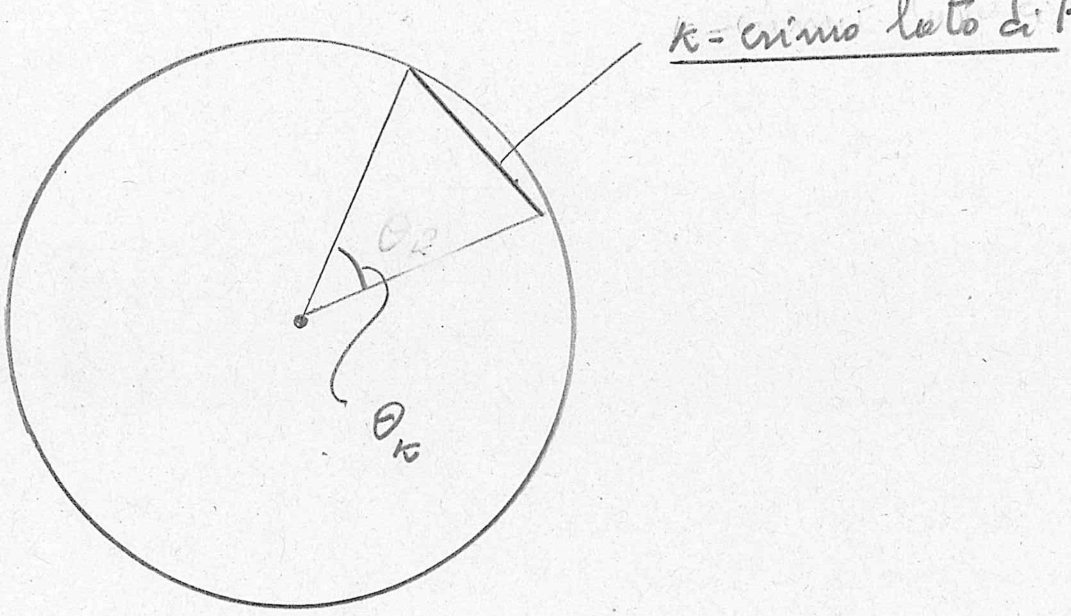
Si veda [FL] pagine 155 - 156

**Esempio 6** (Problema estremale per n-goni inscritti in una circonferenza)

**Teorema** Fra tutti gli n-goni inscritti in una circonferenza e contenenti il centro della circonferenza stessa, quello regolare, e solo quello, ha perimetro e area minimi

NOTA PRELIMINARE Un poligono inscritto in una circonferenza è regolare se e solo se è equilatero

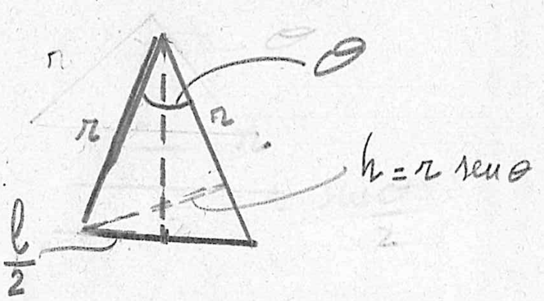
Dimostrazione. Sia P un poligono inscritto in una circonferenza di raggio $r$, e tale che contenga il centro della circonferenza stessa. Siano $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ gli angoli al centro corrispondenti ai lati di P.




Allora

- $l_k :=$ lunghezza del k-esimo lato di P

  $= 2\, r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$




- $a_k =:$ area del triangolo isoscele avente un lato sul k-esimo lato di P e angolo opposto uguale a $\theta_k$

  $= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\theta_k$

Inoltre, poiché P contiene il centro della circonferenza,

$$0 < \theta_k < \pi.$$

Notiamo infine che

(11) $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 2\pi$.

Allora

(12) perimetro di $P = 2r \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$

e

(13) area$(P) = \frac{1}{2} r^2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\theta_k$

Osserviamo ora che la funzione

$$\theta \mapsto \operatorname{sen}\theta$$

è <u>strettamente concava</u> sull'intervallo $]0,\pi[$ in quanto

$$(\operatorname{sen}\theta)'' = -\operatorname{sen}\theta < 0 \quad \forall \theta \in ]0,\pi[$$

Allora, per la disuguaglianza di Jensen,

$$\text{perimetro } P = 2rn \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$$

$$\leq 2rn \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{2}\right) = (\text{Cfr. } (11))$$

$$= 2rn \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

e l'uguaglianza si ha se e solo se

$$\frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_2}{2} = \dots = \frac{\theta_n}{2} = \frac{\pi}{n}$$

e quindi se e solo se il poligono P è equilatero (angoli al centro uguali $\Leftrightarrow$ corde uguali)

Analogamente

$$\text{area}(P) = \frac{r^2}{2} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin(\theta_k)$$

$$\leq \frac{r^2}{2} n \sin\left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{n} \right) = \frac{r^2}{2} n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}$$

e quindi se e solo se P è equilatero. #

Esempio 7 (Entropia di Gibbs)

Definiamo

$$f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$$

nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & , \text{ se } x > 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 . \end{cases}$$

Questa funzione è di classe $C^\infty$ su $]0, \infty[$ e continua su $[0, \infty[$ ($x \log x \to 0$ per $x \downarrow 0$)

Inoltre, poiché

$$f''(x) = (\log x + 1)' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0,$$

la funzione $f$ è convessa strettamente sull'intervallo $]0, \infty[$.

Fissata una $n$-pla $p = (p_1, \dots, p_n)$ di numeri reali nonnegativi tali che

(14) $$0 \leq p_i \leq 1 \; \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

chiamiamo <u>entropia di $p$</u> la funzione

$$H(p) := -\sum_{i=1}^{n} f(p_i)$$ (1).

Poiché $-x \log x > 0$ per $0 < x < 1$, risulta

$$H(p) \geq 0$$

per ogni $p$ come in (14). Inoltre

$$H(p) = 0 \iff \exists i : p_i = 1 \text{ e } p_j = 0 \; \forall j \neq i$$

Dimostriamo che $H(p)$ è <u>massima</u> se e solo se

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

---

(1) In termodinamica statistica si chiama Entropia di Gibbs la funzione $\frac{1}{k_B} H(p)$, con $k_B$ = costante di Boltzmann.

Poiché $f(p_i)=0$ se $p_i=0$, possiamo limitarci a considerare $p_i>0$ per ogni $i=1,\dots,n$.
Inoltre, massimizzare $H(p)$, equivale a minimizzare

$$-H(p) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)$$

Ora, poiché $f$ è strettamente convessa su $]0,\infty[$, per la disuguaglianza di Jensen e ricordando che $\sum_i p_i = 1$, abbiamo

$$-H(p) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(p_i) \le$$

$$\le n\, f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} p_i\right) = n\, f\left(\frac{1}{n}\right)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

i.e., se e solo se

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \forall\, i=1,\dots,n.$$

#