RIGORE E INTUIZIONE IN MATEMATICA

Silvia De Toffoli

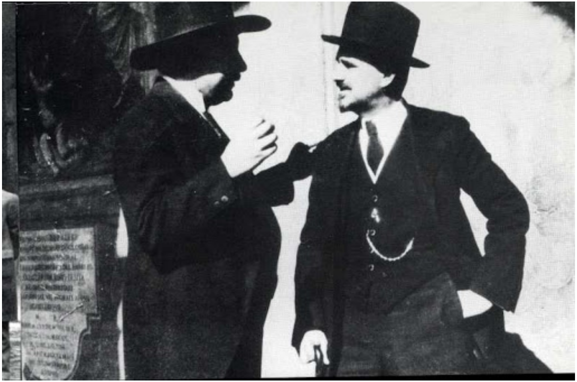
Princeton University

9 luglio 2021

Indice

Indice

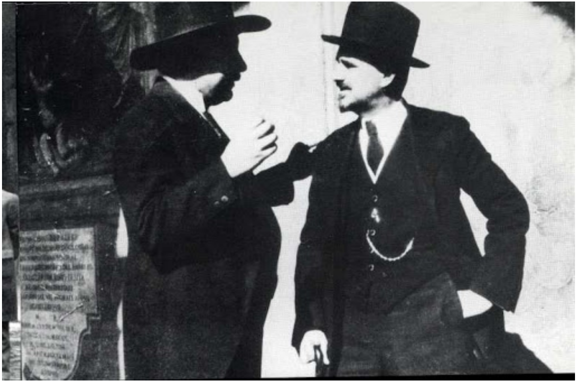
Scienza e filosofia



Enriques e Einstein

- 1911: Enriques organizza il congresso internazionale di filosofia a Bologna.

Scienza e filosofia



Enriques e Einstein

- 1911: Enriques organizza il congresso internazionale di filosofia a Bologna.

La filosofia della matematica “tradizionale”

- Analisi dei fondamenti della matematica:
  1. Logicismo (Frege)
  2. Intuizionismo (Brower)
  3. Formalismo (Hilbert)
- Domande molto generali sulla natura degli oggetti matematici.

La filosofia della matematica "tradizionale"

- Analisi dei fondamenti della matematica:
  1. Logicismo (Frege)
  2. Intuizionismo (Brower)
  3. Formalismo (Hilbert)
- Domande molto generali sulla natura degli oggetti matematici.

La filosofia della matematica “tradizionale”

- Analisi dei fondamenti della matematica:
  1. Logicismo (Frege)
  2. Intuizionismo (Brower)
  3. Formalismo (Hilbert)
- Domande molto generali sulla natura degli oggetti matematici.

Una tendenza recente in filosofia della matematica

[The authors in this collection] believe that the epistemology of mathematics needs to be extended well beyond its present confines to address epistemological issues having to do with fruitfulness, evidence, visualization, diagrammatic reasoning, understanding, explanation, and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of access to 'abstract objects'.

Mancosu, The Philosophy of Mathematical Practice (2008).

Una tendenza recente in filosofia della matematica

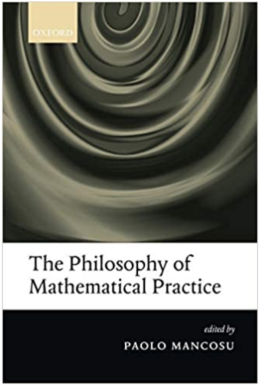
[The authors in this collection] believe that the epistemology of mathematics needs to be extended well beyond its present confines to address epistemological issues having to do with fruitfulness, evidence, **visualization**, **diagrammatic reasoning**, *understanding, explanation, and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of access to 'abstract objects'.*

Mancosu, The Philosophy of Mathematical Practice (2008).

La filosofia della pratica matematica

Certain philosophical problems become salient only when the appropriate area of mathematics is taken into consideration. (ibid.)

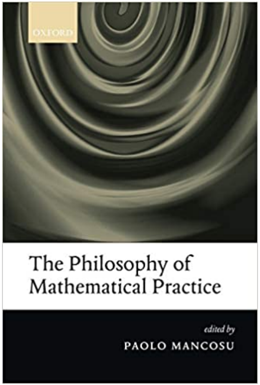
- Si affrontano nuovi problemi: la formazione di concetti, l'uso di strumenti tecnici, etc.
- Interesse per la storia della matematica.



La filosofia della pratica matematica

Certain philosophical problems become salient only when the appropriate area of mathematics is taken into consideration. (ibid.)

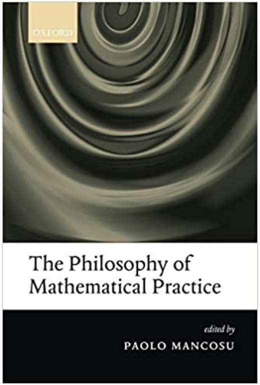
- Si affrontano nuovi problemi: la formazione di concetti, l'uso di strumenti tecnici, etc.
- Interesse per la storia della matematica.



La filosofia della pratica matematica

Certain philosophical problems become salient only when the appropriate area of mathematics is taken into consideration. (ibid.)

- Si affrontano nuovi problemi: la formazione di concetti, l'uso di strumenti tecnici, etc.
- Interesse per la storia della matematica.



Complementarietà con altri approcci

L'analisi della pratica può contribuire a dibattiti tradizionali arricchendo la nostra concezione di cosa sia una dimostrazione e di come si ottenga la giustificazione e la conoscenza in matematica.

Importanti collegamenti con

- la storia della matematica,
- la comunicazione della matematica e
- la didattica della matematica.

Complementarietà con altri approcci

L'analisi della pratica può contribuire a dibattiti tradizionali arricchendo la nostra concezione di cosa sia una dimostrazione e di come si ottenga la giustificazione e la conoscenza in matematica.

Importanti collegamenti con

- la storia della matematica,
- la comunicazione della matematica e
- la didattica della matematica.

Complementarietà con altri approcci

L'analisi della pratica può contribuire a dibattiti tradizionali arricchendo la nostra concezione di cosa sia una dimostrazione e di come si ottenga la giustificazione e la conoscenza in matematica.

Importanti collegamenti con

- la storia della matematica,
- la comunicazione della matematica e
- la didattica della matematica.

Complementarietà con altri approcci

L'analisi della pratica può contribuire a dibattiti tradizionali arricchendo la nostra concezione di cosa sia una dimostrazione e di come si ottenga la giustificazione e la conoscenza in matematica.

Importanti collegamenti con

- la storia della matematica,
- la comunicazione della matematica e
- la didattica della matematica.

Indice

Indice

Dimostrazioni formali e informali

"Gray ... is all theory, and green the golden tree of life."

***34·42.** $\vdash : (z) . R{`}z = P{`}Q{`}z . \supset . R = P \mid Q$

Dem.

$\vdash . {*}14{\cdot}21 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (z) . E ! R{`}z : (z) . E ! P{`}Q{`}z \qquad (1)$

$\vdash . (1) . {*}34{\cdot}41 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (z) . R{`}z = (P \mid Q){`}z :$

$[{*}30{\cdot}42.(1)] \quad \supset : R = P \mid Q :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***34·5.** $\vdash : xR^2y . \equiv . (\exists z) . xRz . zRy \quad [{*}34{\cdot}1 . ({*}34{\cdot}02)]$

***34·51.** $\vdash : xR^3y . \equiv . (\exists z, w) . xRz . zRw . wRy$

Dem.

$\vdash . {*}34{\cdot}1 . ({*}34{\cdot}03) . \supset$

$\vdash :. xR^3y . \equiv : (\exists w) . xR^2w . wRy :$

$[{*}34{\cdot}5] \quad \equiv : (\exists w) : (\exists z) . xRz . zRw : wRy :$

$[{*}11{\cdot}55] \quad \equiv : (\exists w, z) . xRz . zRw . wRy :$

$[{*}11{\cdot}2] \quad \equiv : (\exists z, w) . xRz . zRw . wRy :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***34·52.** $\vdash . R^3 = R \mid R^2 \quad [{*}34{\cdot}21]$

***34·53.** $\vdash : \dot{\exists} ! R^2 . \equiv . \exists ! D{`}R \cap \text{Ɑ}{`}R \quad [{*}34{\cdot}3]$

***34·531.** $\vdash : D{`}R \cap \text{Ɑ}{`}R = \Lambda . \equiv . R^2 = \dot{\Lambda} \quad [{*}34{\cdot}53 . \mathrm{Transp}]$

***34·54.** $\vdash : xRx . \supset . xR^2x$

Dem.

$\vdash . {*}4{\cdot}24 . \supset \vdash : xRx . \supset . xRx . xRx .$

$[{*}10{\cdot}24] \quad \supset . (\exists y) . xRy . yRx .$

$[{*}34{\cdot}5] \quad \supset . xR^2x : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***34·55.** $\vdash :. R^2 \in S . \equiv : xRy . yRz . \supset_{x,y,z} . xSz \quad [{*}34{\cdot}5 . {*}10{\cdot}23]$

***34·56.** $\vdash . D{`}R^2 \subset D{`}R . \text{Ɑ}{`}R^2 \subset \text{Ɑ}{`}R . C{`}R^2 \subset C{`}R \quad [{*}34{\cdot}36{\cdot}38]$

from Russell & Whitehead *Principia Mathematica*

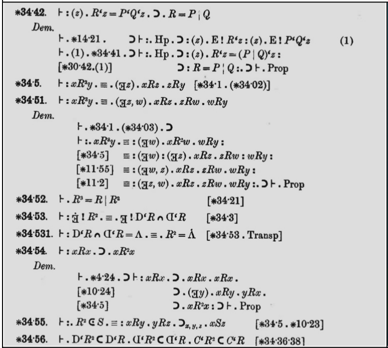
Fields Medalist Maryam Mirzakhani lecturing

È indiscusso che esista una relazione tra dimostrazioni formali e dimostrazioni informali.

Il problema è capire di che relazione si tratti.

Dimostrazioni formali e informali

"Gray ... is all theory, and green the golden tree of life."



∗34·42. ⊢ : (z) . R‘z = P‘Q‘z . ⊃ . R = P ¦ Q

Dem.

⊢ . ∗14·21 . ⊃ ⊢ :. Hp . ⊃ : (z) . E ! R‘z : (z) . E ! P‘Q‘z (1)

⊢ . (1) . ∗34·41 . ⊃ ⊢ :. Hp . ⊃ : (z) . R‘z = (P | Q)‘z :

[∗30·42.(1)] ⊃ : R = P ¦ Q :. ⊃ ⊢ . Prop

∗34·5. ⊢ : xR²y . ≡ . (∃z) . xRz . zRy [∗34·1 . (∗34·02)]

∗34·51. ⊢ : xR³y . ≡ . (∃z, w) . xRz . zRw . wRy

Dem.

⊢ . ∗34·1 . (∗34·03) . ⊃

⊢ :. xR³y . ≡ : (∃w) . xR²w . wRy :

[∗34·5] ≡ : (∃w) : (∃z) . xRz . zRw : wRy :

[∗11·55] ≡ : (∃w, z) . xRz . zRw . wRy :

[∗11·2] ≡ : (∃z, w) . xRz . zRw . wRy :. ⊃ ⊢ . Prop

∗34·52. ⊢ . R³ = R | R² [∗34·21]

∗34·53. ⊢ : ∃̇ ! R² . ≡ . ∃ ! D‘R ∩ Ɑ‘R [∗34·3]

∗34·531. ⊢ : D‘R ∩ Ɑ‘R = Λ . ≡ . R² = Λ̇ [∗34·53 . Transp]

∗34·54. ⊢ : xRx . ⊃ . xR²x

Dem.

⊢ . ∗4·24 . ⊃ ⊢ : xRx . ⊃ . xRx . xRx .

[∗10·24] ⊃ . (∃y) . xRy . yRx .

[∗34·5] ⊃ . xR²x : ⊃ ⊢ . Prop

∗34·55. ⊢ :. R² ⋐ S . ≡ : xRy . yRz . ⊃$_{x,y,z}$. xSz [∗34·5 . ∗10·23]

∗34·56. ⊢ . D‘R² ⊂ D‘R . Ɑ‘R² ⊂ Ɑ‘R . C‘R² ⊂ C‘R [∗34·36·38]

from Russell & Whitehead *Principia Mathematica*

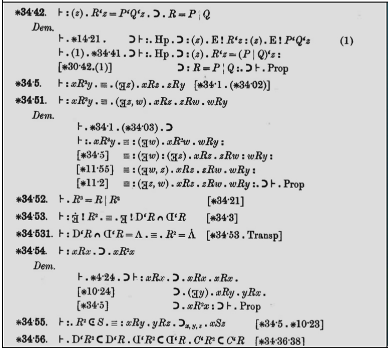
Fields Medalist Maryam Mirzakhani lecturing

È indiscusso che esista una relazione tra dimostrazioni formali e dimostrazioni informali.

Il problema è capire di che relazione si tratti.

Dimostrazioni formali e informali

"Gray … is all theory, and green the golden tree of life."



*34·42. ⊢ : (z) . R‘z = P‘Q‘z . ⊃ . R = P | Q
Dem.
⊢ . *14·21 . ⊃ ⊢ :. Hp . ⊃ : (z) . E ! R‘z : (z) . E ! P‘Q‘z (1)
⊢ . (1) . *34·41 . ⊃ ⊢ :. Hp . ⊃ : (z) . R‘z = (P | Q)‘z :
[*30·42.(1)] ⊃ : R = P | Q :. ⊃ ⊢ . Prop
*34·5. ⊢ : xR²y . ≡ . (∃z) . xRz . zRy [*34·1 . (*34·02)]
*34·51. ⊢ : xR³y . ≡ . (∃z, w) . xRz . zRw . wRy
Dem.
⊢ . *34·1 . (*34·03) . ⊃
⊢ :. xR³y . ≡ : (∃w) . xR²w . wRy :
[*34·5] ≡ : (∃w) : (∃z) . xRz . zRw : wRy :
[*11·55] ≡ : (∃w, z) . xRz . zRw . wRy :
[*11·2] ≡ : (∃z, w) . xRz . zRw . wRy :. ⊃ ⊢ . Prop
*34·52. ⊢ . R³ = R | R² [*34·21]
*34·53. ⊢ : ∃̇ ! R² . ≡ . ∃ ! D‘R ∩ Ꭰ‘R [*34·3]
*34·531. ⊢ : D‘R ∩ Ꭰ‘R = Λ . ≡ . R² = Λ̇ [*34·53 . Transp]
*34·54. ⊢ : xRx . ⊃ . xR²x
Dem.
⊢ . *4·24 . ⊃ ⊢ : xRx . ⊃ . xRx . xRx .
[*10·24] ⊃ . (∃y) . xRy . yRx .
[*34·5] ⊃ . xR²x : ⊃ ⊢ . Prop
*34·55. ⊢ :. R² ⋐ S . ≡ : xRy . yRz . ⊃ₓ,ᵧ,𝓏 . xSz [*34·5 . *10·23]
*34·56. ⊢ . D‘R² ⊂ D‘R . Ꭰ‘R² ⊂ Ꭰ‘R . C‘R² ⊂ C‘R [*34·36·38]

from Russell & Whitehead *Principia Mathematica*

Fields Medalist Maryam Mirzakhani lecturing

È indiscusso che esista una relazione tra dimostrazioni formali e dimostrazioni informali.

Il problema è capire di che relazione si tratti.

Rigore

Come definire il rigore matematico?

- Una dimostrazione è rigorosa se, con aiuto di un logico, un matematico potrebbe trasformarla in una dimostrazione formale. Il logico è come una levatrice socratica (Steiner).
- Una dimostrazione è rigorosa se contiene abbastanza dettagli per convincere (per le ragioni giuste) il pubblico appropriato che esista una dimostrazione formale (Burgess).

Rigore

Come definire il rigore matematico?

- Una dimostrazione è rigorosa se, con aiuto di un logico, un matematico potrebbe trasformarla in una dimostrazione formale. Il logico è come una levatrice socratica (Steiner).
- Una dimostrazione è rigorosa se contiene abbastanza dettagli per convincere (per le ragioni giuste) il pubblico appropriato che esista una dimostrazione formale (Burgess).

Rigore

Come definire il rigore matematico?

- Una dimostrazione è rigorosa se, con aiuto di un logico, un matematico potrebbe trasformarla in una dimostrazione formale. Il logico è come una levatrice socratica (Steiner).
- Una dimostrazione è rigorosa se contiene abbastanza dettagli per convincere (per le ragioni giuste) il pubblico appropriato che esista una dimostrazione formale (Burgess).

Formalizzazione e Intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Formalizzazione e Intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Formalizzazione e Intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Formalizzazione e Intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Formalizzazione e Intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Criteri di accettabilità

Il modo in cui controlliamo la correttezza delle dimostrazioni informali è più variegato rispetto a quello usato per le dimostrazioni formali. Infatti, non può essere esplicitato senza entrare nei dettagli dei vari casi.

- Certe inferenze di alto livello possono essere comprese senza riferimento a passaggi formali.
- Per esempio, certi usi dell'intuizione sono accettabili in pratica... ma non tutti.

Criteri di accettabilità

Il modo in cui controlliamo la correttezza delle dimostrazioni informali è più variegato rispetto a quello usato per le dimostrazioni formali. Infatti, non può essere esplicitato senza entrare nei dettagli dei vari casi.

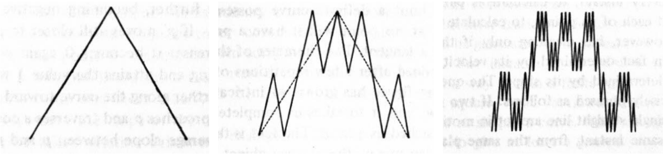
- Certe inferenze di alto livello possono essere comprese senza riferimento a passaggi formali.
- Per esempio, certi usi dell'intuizione sono accettabili in pratica... ma non tutti.

Criteri di accettabilità

Il modo in cui controlliamo la correttezza delle dimostrazioni informali è più variegato rispetto a quello usato per le dimostrazioni formali. Infatti, non può essere esplicitato senza entrare nei dettagli dei vari casi.

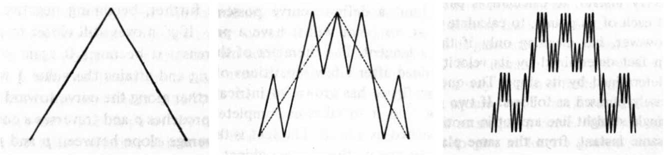
- Certe inferenze di alto livello possono essere comprese senza riferimento a passaggi formali.
- Per esempio, certi usi dell'intuizione sono accettabili in pratica... ma non tutti.

La crisi dell'intuizione



had we relied on intuition in this instance, we should have remained in error, for intuition seems to force the conclusion that there cannot be curves lacking a tangent at any point. (Hahn, 1933)

La crisi dell'intuizione



had we relied on intuition in this instance, we should have remained in error, for intuition seems to force the conclusion that there cannot be curves lacking a tangent at any point. (Hahn, 1933)

La scuola italiana di geometria algebrica

A cavallo tra il XIX e il XX secolo, la scuola italiana di geometria algebrica ha sviluppato molte nuove idee in modo intuitivo.

La “rigorizzazione” avvenne con Zariski, uno studente di Castelnuovo.

> *L’Autore stesso ha cura di avvertire fin dalla prefazione che il trattato, più che esporre una dottrina già statica e cristallizzata, aspira a suscitare nel lettore il desiderio di portare complementi e perfezionamenti a varie teorie. E dove il terreno è meno solido l’Autore mette sull’avviso lo studioso. (Castelnuovo, 1949)*

> *Enriques was a visionary. And, remarkably, his intuitions never seemed to fail him (unlike those of Severi, whose extrapolations of known theories were sometimes quite wrong). (Mumford, 2011)*

La scuola italiana di geometria algebrica

A cavallo tra il XIX e il XX secolo, la scuola italiana di geometria algebrica ha sviluppato molte nuove idee in modo intuitivo.
La “rigorizzazione” avvenne con Zariski, uno studente di Castelnuovo.

> *L'Autore stesso ha cura di avvertire fin dalla prefazione che il trattato, più che esporre una dottrina già statica e cristallizzata, aspira a suscitare nel lettore il desiderio di portare complementi e perfezionamenti a varie teorie. E dove il terreno è meno solido l'Autore mette sull'avviso lo studioso. (Castelnuovo, 1949)*

> *Enriques was a visionary. And, remarkably, his intuitions never seemed to fail him (unlike those of Severi, whose extrapolations of known theories were sometimes quite wrong). (Mumford, 2011)*

La scuola italiana di geometria algebrica

A cavallo tra il XIX e il XX secolo, la scuola italiana di geometria algebrica ha sviluppato molte nuove idee in modo intuitivo.
La "rigorizzazione" avvenne con Zariski, uno studente di Castelnuovo.

> *L'Autore stesso ha cura di avvertire fin dalla prefazione che il trattato, più che esporre una dottrina già statica e cristallizzata, aspira a suscitare nel lettore il desiderio di portare complementi e perfezionamenti a varie teorie. E dove il terreno è meno solido l'Autore mette sull'avviso lo studioso. (Castelnuovo, 1949)*

> *Enriques was a visionary. And, remarkably, his intuitions never seemed to fail him (unlike those of Severi, whose extrapolations of known theories were sometimes quite wrong). (Mumford, 2011)*

La scuola italiana di geometria algebrica

A cavallo tra il XIX e il XX secolo, la scuola italiana di geometria algebrica ha sviluppato molte nuove idee in modo intuitivo.
La "rigorizzazione" avvenne con Zariski, uno studente di Castelnuovo.

> *L'Autore stesso ha cura di avvertire fin dalla prefazione che il trattato, più che esporre una dottrina già statica e cristallizzata, aspira a suscitare nel lettore il desiderio di portare complementi e perfezionamenti a varie teorie. E dove il terreno è meno solido l'Autore mette sull'avviso lo studioso. (Castelnuovo, 1949)*

> *Enriques was a visionary. And, remarkably, his intuitions never seemed to fail him (unlike those of Severi, whose extrapolations of known theories were sometimes quite wrong). (Mumford, 2011)*

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

Risultati ottenuti:

- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Futuri criteri di accettabilità?

Gli assistenti di dimostrazione iterativi sono sempre più sviluppati.
In certe aree della matematica, una dimostrazione formale potrebbe essere richiesta accanto ad una dimostrazione informale (Avigad).

- Vladimir Voevodsky
- Kevin Buzzard

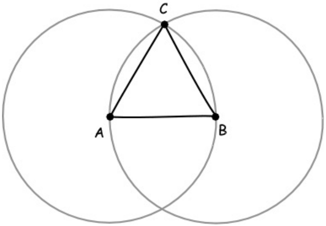
Risultati ottenuti:

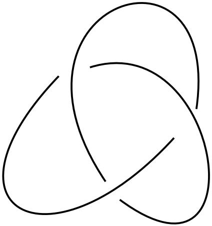
- La congettura dei 4 colori (Gonthier, 2004)
- La congettura di Keplero (Hales, 2017)
- La sfida di Scholze (2021)
  - Peter Scholze ha lanciato una sfida alla comunità del "iteractive proof assistant" LEAN. Voleva controllare la correttezza di un suo teorema fondamentale (Teorema 9.4 di Analytic).
  - In soli sei mesi, vari collaboratori sono riusciti a creare una dimostrazione formale controllata automaticamente.

Indice

Indice

Diagrammi

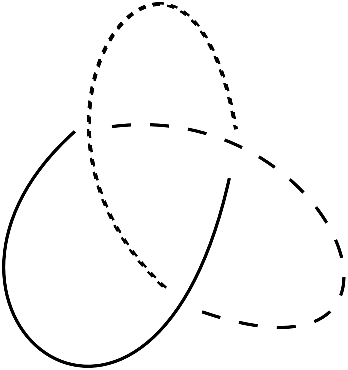




$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d, "\delta_{p+2}"] & \cdots \arrow[d, "\delta_{p+2}"] & \cdots \arrow[d, "\delta_{p+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "i_{p+1}"] \arrow[d, "\delta_{p+1}"] & B_{p+1} \arrow[r, "j_{p+1}"] \arrow[d, "\delta_{p+1}"] & C_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{p+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_p \arrow[r, "i_p"] \arrow[d, "\delta_p"] & B_p \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "\delta_p"] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "\delta_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "i_{p-1}"] \arrow[d, "\delta_{p-1}"] & B_{p-1} \arrow[r, "j_{p-1}"] \arrow[d, "\delta_{p-1}"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{p-1}"] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Diagrammi

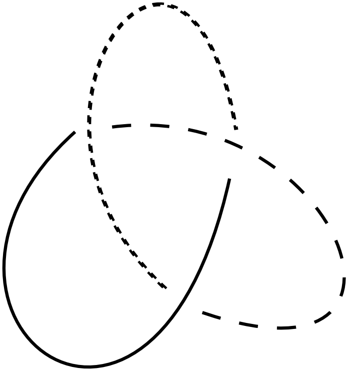
Proofs, especially in topology and geometry, rely on intuitive arguments in situations where a trained mathematician would be capable of translating those intuitive arguments into a more rigorous argument. (Hales, 2008)



Manipolare i diagrammi, che sono delle rappresentazioni esterne concrete, permette di ottenere delle informazioni sulle strutture matematiche astratte.

Diagrammi

Proofs, especially in topology and geometry, rely on intuitive arguments in situations where a trained mathematician would be capable of translating those intuitive arguments into a more rigorous argument. (Hales, 2008)



Manipolare i diagrammi, che sono delle rappresentazioni esterne concrete, permette di ottenere delle informazioni sulle strutture matematiche astratte.

Il bando dei diagrammi

Il bando dei diagrammi che fu attuato dopo la crisi dell'intuizione è parzialmente non giustificato:

1. Certi diagrammi sfruttano l'intuizione in modo rigoroso:
   - Diagrammi di nodi
   - Rappresentazioni topologiche
   - Diagrammi di Venn
   - La lingua grafica delle categorie monoidali
2. Altri non usano neanche l'intuizione!
   - Diagrammi commutativi in algebra omologica
   - Diagrammi commutativi in teoria delle categorie
   - Il *Begriffsschrift* di Frege

Il bando dei diagrammi

Il bando dei diagrammi che fu attuato dopo la crisi dell'intuizione è parzialmente non giustificato:

1. Certi diagrammi sfruttano l'intuizione in modo rigoroso:
   - Diagrammi di nodi
   - Rappresentazioni topologiche
   - Diagrammi di Venn
   - La lingua grafica delle categorie monoidali
2. Altri non usano neanche l'intuizione!
   - Diagrammi commutativi in algebra omologica
   - Diagrammi commutativi in teoria delle categorie
   - Il *Begriffsschrift* di Frege

Il bando dei diagrammi

Il bando dei diagrammi che fu attuato dopo la crisi dell'intuizione è parzialmente non giustificato:

1. Certi diagrammi sfruttano l'intuizione in modo rigoroso:
   - Diagrammi di nodi
   - Rappresentazioni topologiche
   - Diagrammi di Venn
   - La lingua grafica delle categorie monoidali

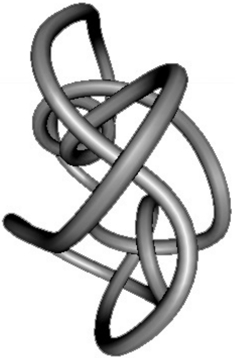
2. Altri non usano neanche l'intuizione!
   - Diagrammi commutativi in algebra omologica
   - Diagrammi commutativi in teoria delle categorie
   - Il *Begriffsschrift* di Frege

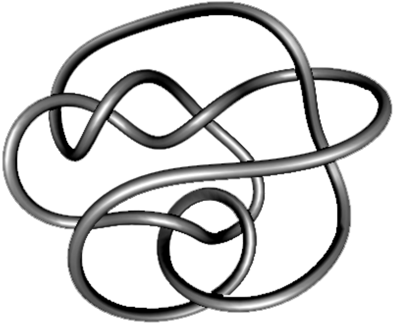
. . . Der Geometer, der von der Anschauung ausgeht.

Felix Klein (1892) ha suggerito che ogni dipartimento di matematica dovrebbe avere almeno un professore per ognuno di questi tipi di matematici:

- Il filosofo, che pensa con concetti,
- L'analista, che essenzialmente manipola formule,
- Il geometra, il cui punto di partenza è l'intuizione.

Illustrazioni e diagrammi



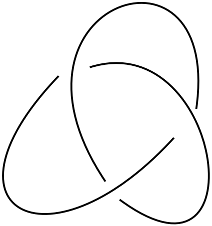


Dalle illustrazioni ai **diagrammi**

I diagrammi sono rappresentazioni più controllate nelle quali le caratteristiche costitutive sono chiaramente identificabili.

Per ottenere un *diagramma di un nodo* bisogna:

- *Proiettare* il nodo in una superficie mantenendo le informazioni nei punti di intersezione (punti singolari).
- Assicurarsi che la proiezione sia *regolare*: i punti di intersezione devono essere trasversali e devono contenere solo due fili.

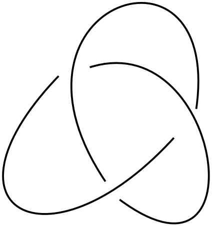


Dalle illustrazioni ai **diagrammi**

I diagrammi sono rappresentazioni più controllate nelle quali le caratteristiche costitutive sono chiaramente identificabili.

Per ottenere un *diagramma di un nodo* bisogna:

- *Proiettare* il nodo in una superficie mantenendo le informazioni nei punti di intersezione (punti singolari).
- Assicurarsi che la proiezione sia *regolare*: i punti di intersezione devono essere trasversali e devono contenere solo due fili.



Intuizione naive e intuizione raffinata

- **L'intuizione naive è innata ma si sviluppa con l'esperienza:**
  Le esperienze meccaniche, come quella che abbiamo nella manipolazione dei corpi solidi, contribuiscono a formare le nostre ordinarie intuizioni metriche, mentre le esperienze ottiche con raggi di luce e ombre sono responsabili dello sviluppo di un'intuizione "proiettiva".

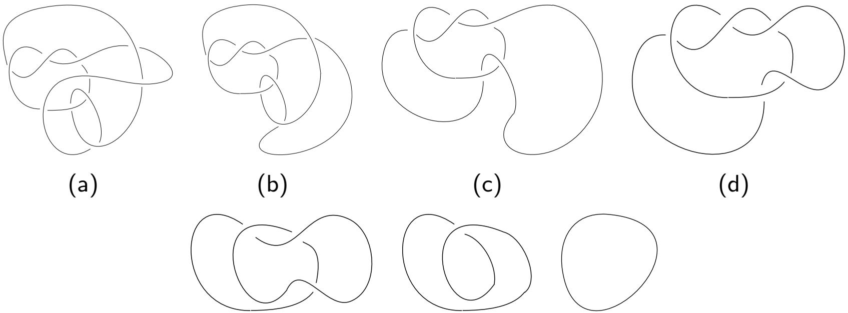
- **L'intuizione raffinata si sviluppa con l'apprendimento della matematica:**
  È l'intuizione raffinata che troviamo in Euclide; sviluppa attentamente il suo sistema sulla base di assiomi ben formulati, è pienamente consapevole della necessità di dimostrazioni esatte, distingue chiaramente tra il commensurabile e l'incommensurabile, e così via.

Intuizione naive e intuizione raffinata

- **L'intuizione naive è innata ma si sviluppa con l'esperienza:**
  Le esperienze meccaniche, come quella che abbiamo nella manipolazione dei corpi solidi, contribuiscono a formare le nostre ordinarie intuizioni metriche, mentre le esperienze ottiche con raggi di luce e ombre sono responsabili dello sviluppo di un'intuizione "proiettiva".

- **L'intuizione raffinata si sviluppa con l'apprendimento della matematica:**
  È l'intuizione raffinata che troviamo in Euclide; sviluppa attentamente il suo sistema sulla base di assiomi ben formulati, è pienamente consapevole della necessità di dimostrazioni esatte, distingue chiaramente tra il commensurabile e l'incommensurabile, e così via.

Snodare il nodo



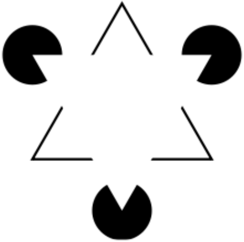
(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g)

Una buona convenzione

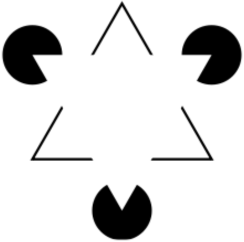
L'interruzione nelle linee suggerisce tridimensionalità.

Le leggi di ragruppamento visive sono state investigate dalla *Gestaltpsychologie*. Un fenomeno simile avviene nel triangolo di Kanizsa:



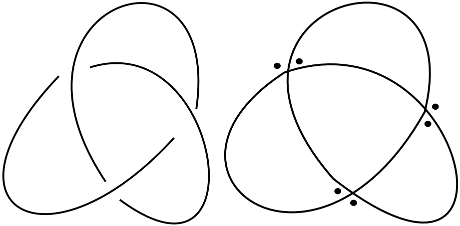
Una buona convenzione

L'interruzione nelle linee suggerisce tridimensionalità.
Le leggi di ragruppamento visive sono state investigate dalla *Gestaltpsychologie*. Un fenomeno simile avviene nel triangolo di Kanizsa:



Una buona convenzione

Questa è solo una convenzione, altre scelte sono possibili:



Immaginazione manipolativa

I diagrammi di nodi ci permettono di utilizzare un'intuizione raffinata che possiamo utilizzare nelle dimostrazioni.
Non si tratta solo di visione, ma anche di intuizione spazio-motoria (De Toffoli e Gardino, 2014).

E' più della semplice visione:

1. Sfrutta delle abilità innate ma viene raffinata con l'esercizio.
2. Non si tratta solo di rappresentazioni ma di azioni (manipolazione di diagrammi).

Immaginazione manipolativa

I diagrammi di nodi ci permettono di utilizzare un'intuizione raffinata che possiamo utilizzare nelle dimostrazioni.
Non si tratta solo di visione, ma anche di intuizione spazio-motoria (De Toffoli e Gardino, 2014).

E' più della semplice visione:

1. Sfrutta delle abilità innate ma viene raffinata con l'esercizio.
2. Non si tratta solo di rappresentazioni ma di azioni (manipolazione di diagrammi).

Immaginazione manipolativa

I diagrammi di nodi ci permettono di utilizzare un'intuizione raffinata che possiamo utilizzare nelle dimostrazioni.
Non si tratta solo di visione, ma anche di intuizione spazio-motoria (De Toffoli e Gardino, 2014).

E' più della semplice visione:

1. Sfrutta delle abilità innate ma viene raffinata con l'esercizio.
2. Non si tratta solo di rappresentazioni ma di azioni (manipolazione di diagrammi).

Immaginazione manipolativa

I diagrammi di nodi ci permettono di utilizzare un'intuizione raffinata che possiamo utilizzare nelle dimostrazioni.
Non si tratta solo di visione, ma anche di intuizione spazio-motoria (De Toffoli e Gardino, 2014).

E' più della semplice visione:

1. Sfrutta delle abilità innate ma viene raffinata con l'esercizio.
2. Non si tratta solo di rappresentazioni ma di azioni (manipolazione di diagrammi).

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.

Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.
Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.
Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.
Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.
Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.

La caccia al diagramma

Lemma (La versione forte del lemma dei 5)

Il seguente diagramma di gruppi abeliani è commutativo e le sue righe sono esatte. Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva. Simmetricamente, se f_2 e f_4 sono iniettive, e f_1 è suriettiva, allora f_3 è iniettiva.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

b3

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted, mapsto] & b_4 &
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & & a4 & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b3 \arrow[r, dotted] & b4 \arrow[uuu, dotted, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & a_4 & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted] & 0
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & & a_4 \arrow[r, dotted, mapsto] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted, mapsto] & b_4 \arrow[r, dotted, mapsto] \arrow[uu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & a3 \arrow[r, dotted, |->] & a4 \arrow[r, dotted, |->] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b3 \arrow[r, dotted, |->] & b4 \arrow[r, dotted, |->] \arrow[uu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

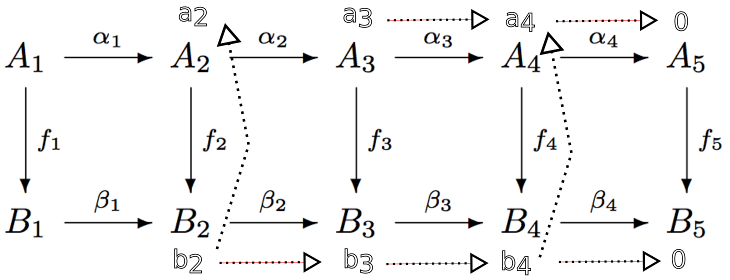
Supponiamo che $f_3(a_3) = b_3'$, allora $\beta_3(b_3) - \beta_3(b_3') = b_4 - b_4 = 0$.
Assumiamo: $\beta_3(b_3) = 0$ (abbiamo solo sottratto un elemento con una preimmagine in A_3).

$$
\begin{tikzcd}
 & & a_3 \arrow[r, dotted] & a_4 \arrow[r, dotted] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}
$$

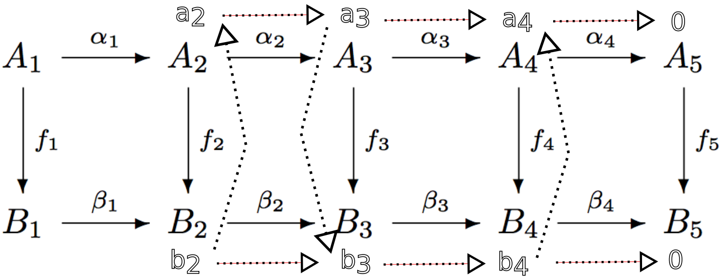
Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & a3 \arrow[r, dotted] & a4 \arrow[r, dotted] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & b2 \arrow[r, dotted] & b3 \arrow[r, dotted] & b4 \arrow[r, dotted] \arrow[uu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.



Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.



L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
  - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
  - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
  - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
  - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
  - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
  - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
    - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
    - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
  - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
  - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

Indice

Indice

L'essenzialità dei diagrammi

- I diagrammi possono essere convertiti in codici ma il ragionamento in gioco cambierebbe radicalmente.
- Se i diagrammi sono essenziali o meno in una dimostrazione dipende da come le dimostrazioni vengono individuate.

L'essenzialità dei diagrammi

- I diagrammi possono essere convertiti in codici ma il ragionamento in gioco cambierebbe radicalmente.
- Se i diagrammi sono essenziali o meno in una dimostrazione dipende da come le dimostrazioni vengono individuate.

Come individuare le dimostrazioni?

Tim Gowers ha ammesso che anche alla semplice domanda 'When are two proofs the same?' è molto difficile dare una risposta (2007).

> *For instance, if two proofs are essentially the same, must there always be some more general perspective from which one can see that the only differences between them consist in arbitrary choices that do not affect the argument in an important way?*
> *(A simple example of what I mean is something like replacing "Let $\epsilon = \delta/5$" by "Let $\epsilon = \delta/3$" in an argument in real analysis. But there are much more interesting examples of this.) Also, is "essential equivalence" really an equivalence relation, or could one morph in several stages from one proof to another that was "genuinely different"? (2007)*

Come individuare le dimostrazioni?

Tim Gowers ha ammesso che anche alla semplice domanda 'When are two proofs the same?' è molto difficile dare una risposta (2007).

> *For instance, if two proofs are essentially the same, must there always be some more general perspective from which one can see that the only differences between them consist in arbitrary choices that do not affect the argument in an important way?*
> *(A simple example of what I mean is something like replacing "Let $\epsilon = \delta/5$" by "Let $\epsilon = \delta/3$" in an argument in real analysis. But there are much more interesting examples of this.) Also, is "essential equivalence" really an equivalence relation, or could one morph in several stages from one proof to another that was "genuinely different"? (2007)*

Come individuare le dimostrazioni?

Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one's main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)

Examples:

1. La dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Come individuare le dimostrazioni?

Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one's main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)

Examples:

1. La dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Come individuare le dimostrazioni?

Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one's main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)

Examples:

1. La dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Come individuare le dimostrazioni?

> *Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one’s main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)*

Examples:

1. La dimostrazione di Euclide dell’esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Come individuare le dimostrazioni?

Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one's main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)

Examples:

1. La dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Il ragionamento in gioco

Se individuiamo le dimostrazioni in un modo che sia sensibile al particolare tipo di ragionamento che serve per capirle, allora formalizzare una dimostrazione topologica che include visualizzazioni in una dimostrazione formale trasformerebbe la dimostrazione originale in una dimostrazione diversa.

- Ciò non vuol dire che le dimostrazioni non possano essere "tradotte"; ma che la traduzione non preservi il ragionamento diagrammatico.
- Anche per le dimostrazioni che contengono diagrammi dei nodi, è abbastanza semplice ottenere una dimostrazione puramente simbolica.
- Ciò è ancora più semplice per le dimostrazioni che contengono diagrammi commutativi.

Il ragionamento in gioco

Se individuiamo le dimostrazioni in un modo che sia sensibile al particolare tipo di ragionamento che serve per capirle, allora formalizzare una dimostrazione topologica che include visualizzazioni in una dimostrazione formale trasformerebbe la dimostrazione originale in una dimostrazione diversa.

- Ciò non vuol dire che le dimostrazioni non possano essere “tradotte”; ma che la traduzione non preservi il ragionamento diagrammatico.
- Anche per le dimostrazioni che contengono diagrammi dei nodi, è abbastanza semplice ottenere una dimostrazione puramente simbolica.
- Ciò è ancora più semplice per le dimostrazioni che contengono diagrammi commutativi.

Il ragionamento in gioco

Se individuiamo le dimostrazioni in un modo che sia sensibile al particolare tipo di ragionamento che serve per capirle, allora formalizzare una dimostrazione topologica che include visualizzazioni in una dimostrazione formale trasformerebbe la dimostrazione originale in una dimostrazione diversa.

- Ciò non vuol dire che le dimostrazioni non possano essere "tradotte"; ma che la traduzione non preservi il ragionamento diagrammatico.
- Anche per le dimostrazioni che contengono diagrammi dei nodi, è abbastanza semplice ottenere una dimostrazione puramente simbolica.
- Ciò è ancora più semplice per le dimostrazioni che contengono diagrammi commutativi.

Il ragionamento in gioco

Se individuiamo le dimostrazioni in un modo che sia sensibile al particolare tipo di ragionamento che serve per capirle, allora formalizzare una dimostrazione topologica che include visualizzazioni in una dimostrazione formale trasformerebbe la dimostrazione originale in una dimostrazione diversa.

- Ciò non vuol dire che le dimostrazioni non possano essere "tradotte"; ma che la traduzione non preservi il ragionamento diagrammatico.
- Anche per le dimostrazioni che contengono diagrammi dei nodi, è abbastanza semplice ottenere una dimostrazione puramente simbolica.
- Ciò è ancora più semplice per le dimostrazioni che contengono diagrammi commutativi.

Indice

Indice

Didattica: Emma Castelnuovo

L'intuizione raffinata si sviluppa con l'esperienza.

> *Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché "non sanno vedere". Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può "schiacciarsi" e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi "limite" parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal "saper vedere" un concreto dinamico, costruttivo. (1967)*

Didattica: Emma Castelnuovo

L'intuizione raffinata si sviluppa con l'esperienza.

> *Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché "non sanno vedere". Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può "schiacciarsi" e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi "limite" parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal "saper vedere" un concreto dinamico, costruttivo. (1967)*

Conclusione

- Gli standard di accettabilità delle dimostrazioni dipendono dal background condiviso del pubblico a cui la dimostrazione è indirizzata.
- L'uso di diagrammi è conciliabile con il rigore matematico:
  1. Certi diagrammi sfruttano un'intuizione raffinata.
  2. Altri diagrammi non invocano nessun tipo di intuizione spazio-temporale.
- C'è un modo plausibile per individuare le dimostrazioni matematiche tale che in certe dimostrazioni diagrammatiche rimpiazzare i diagrammi con rappresentazioni linguistiche non porta a una presentazione diversa della stessa dimostrazione, ma proprio a una dimostrazione diversa.

Conclusione

- Gli standard di accettabilità delle dimostrazioni dipendono dal background condiviso del pubblico a cui la dimostrazione è indirizzata.
- L'uso di diagrammi è conciliabile con il rigore matematico:
  1. Certi diagrammi sfruttano un'intuizione raffinata.
  2. Altri diagrammi non invocano nessun tipo di intuizione spazio-temporale.
- C'è un modo plausibile per individuare le dimostrazioni matematiche tale che in certe dimostrazioni diagrammatiche rimpiazzare i diagrammi con rappresentazioni linguistiche non porta a una presentazione diversa della stessa dimostrazione, ma proprio a una dimostrazione diversa.

Conclusione

- Gli standard di accettabilità delle dimostrazioni dipendono dal background condiviso del pubblico a cui la dimostrazione è indirizzata.
- L'uso di diagrammi è conciliabile con il rigore matematico:
  1. Certi diagrammi sfruttano un'intuizione raffinata.
  2. Altri diagrammi non invocano nessun tipo di intuizione spazio-temporale.
- C'è un modo plausibile per individuare le dimostrazioni matematiche tale che in certe dimostrazioni diagrammatiche rimpiazzare i diagrammi con rappresentazioni linguistiche non porta a una presentazione diversa della stessa dimostrazione, ma proprio a una dimostrazione diversa.

Conclusione

- Gli standard di accettabilità delle dimostrazioni dipendono dal background condiviso del pubblico a cui la dimostrazione è indirizzata.
- L'uso di diagrammi è conciliabile con il rigore matematico:
    1. Certi diagrammi sfruttano un'intuizione raffinata.
    2. Altri diagrammi non invocano nessun tipo di intuizione spazio-temporale.
- C'è un modo plausibile per individuare le dimostrazioni matematiche tale che in certe dimostrazioni diagrammatiche rimpiazzare i diagrammi con rappresentazioni linguistiche non porta a una presentazione diversa della stessa dimostrazione, ma proprio a una dimostrazione diversa.

Grazie per l'attenzione!