1) Considera le seguenti relazioni sull'insieme dei triangoli del piano e, per ciascuna di esse, decidi, spiegando perché, se sono o meno relazioni di equivalenza. In entrambi i casi mostra due triangoli equivalenti e due che non lo sono.

   (a) Sia s una retta del piano fissata. Diciamo che $T_1 =_s T_2$ se T_1 e T_2 coincidono oppure esiste una riflessione di asse s che manda T_1 in T_2.

   (b) Sia s una retta del piano fissata. Diciamo che $T_1 =_\parallel T_2$ se T_1 e T_2 coincidono oppure esiste una riflessione avente asse parallelo ad s che manda T_1 in T_2.

   (c) Sia P un punto del piano fissato. Diciamo che $T_1 =_P T_2$ se esiste una rotazione di centro P che manda T_1 in T_2.

2) Sia X un insieme non vuoto. Ricordiamo che una funzione f su X è una relazione avente la proprietà seguente:

   per ogni $x \in X$ esiste un unico elemento in Xche è in relazione con x.

   Tale elemento è indicato con $f(x)$. Una funzione può essere anche una relazione di equivalenza? Perché?

3) Diciamo che due figure sono equipollenti se esiste una traslazione che porta l'una nell'altra. Disegna due triangoli che sono congruenti, ma non equipollenti. Sapresti dimostrare che non sono equipollenti? Quali quantità si mantengono invariate per equipollenza? Quali cambiano? Sapresti scrivere dei "criteri di equipollenza" dei triangoli?

4) Disegna un triangolo equilatero T. Determina tutte le isometrie del piano che lo lasciano invariato, disegnando e descrivendo esplicitamente l'asse (nel caso di simmetrie), il centro e l'angolo (nel caso di rotazioni), il vettore (nel caso di traslazioni). Chiama G_T questo insieme (questo insieme con la composizione forma un gruppo, chiamato gruppo delle simmetrie di T). Disegnare un altro triangolo T' congruente, ma non coincidente con T . Le isometrie di G_T lasciano invariato T'? È possibile descrivere le isometrie che lasciano invariato T' in termini di quelle che lasciano invariato T? Se vuoi, per fare questo esercizio, puoi aiutarti disegnando il triangolo su una foglio trasparente e soprapponendolo ad una figura disegnata su un cartoncino o su un altro foglio.

5) Fissa un punto P del piano. Associa ad ogni numero reale a la rotazione di un angolo avente ampiezza a intorno a P usando la convenzione che un numero positivo corrisponde ad una rotazione in senso antiorario e un numero negativo in senso orario. A cosa corrisponde lo zero? A cosa corrisponde la somma di due numeri? A cosa corrisponde l'opposto di un numero? Ci sono numeri ai quali corrisponde la stessa rotazione? Se sì quali?

6) Fissa un sistema di riferimento $(O, \vec{i}, \vec{j})$, con O punto del piano, $\vec{i}$ e $\vec{j}$ vettori applicati in O, ortogonali tra loro e di lunghezza 1. Considera l'affinità, che rispetto a tale sistema di riferimento, ha equazioni

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + 1 \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

(a) Disegna il triangolo di vertici $A = (3, 2)$, $B = (2, 1)$ e $C = (-2, -1)$ e il trasformato di questo triangolo rispetto all'affinità.

(b) Disegna la retta $y = -x + 2$ e la sua trasformata rispetto all'affinità. Qual è la sua equazione?

(c) Disegna la circonferenza Γ di centro O e raggio 1. Quale curva si ottiene trasformando Γ con l'affinità. Prova a disegnarla e a determinarne l'equazione.

(d) Trova le equzioni dell'affinità inversa.

7) Fissa un sistema di riferimento $(O, \vec{i}, \vec{j})$, con O punto del piano, $\vec{i}$ e $\vec{j}$ vettori applicati in O, ortogonali tra loro e di lunghezza 1. Rispetto a tale sistema di riferimento, considera le affinità del tipo

$$\begin{cases} x' = mx + e \\ y' = ny + f \end{cases},$$

con $m, n \neq 0$.

(a) Quali condizioni devi imporre su m, n, e ed f per far in modo che l'affinità che ottieni conservi le aree?

(b) Quali condizioni devi imporre su m, n, e ed f per far in modo che l'affinità che ottieni conservi gli angoli?

(c) Quali condizioni devi imporre su m, n, e ed f per far in modo che l'affinità che ottieni conservi le lunghezze?

8) Prova a dimostrare che tutti i parallelogrammi sono affinemente equivalenti usando i suggerimenti che trovi negli appunti.