PLS
matematica
UNIBO

SEMINARI ON-LINE

Piano Nazionale
Lauree Scientifiche

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

ALESSIA CATTABRIGA

"TRASFORMARE E CLASSIFICARE: UNA STORIA DI FIGURE E INVARIANTI"

Il seminario inizia alle 16:30

Felix Klein (1872) da “Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Forschungen” (Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti):

« [...] **la geometria, che è pur unica nella sua sostanza,** nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi **si è troppo suddivisa in discipline quasi separate** […] che vanno progredendo alquanto indipendentemente […] non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, **ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già pensato da taluno più o meno esattamente.**»

INIZIAMO CON UNA DOMANDA...

Ci sono rettangoli uguali tra questi? Se sì quali e perché?

Mentimeter

No

Non abbiamo dati per poterlo dire

Dipende

giallo e rosso hanno stesse proporzioni

è possibile che ci siano infiniti rettangoli uguali anche se non distinguibili, infatti due figure si dicono uguali quando sono coincidenti.

Uguali NO, congruenti forse il giallo e il verde

Dipende da che cosa si intende per "uguali".

giallo e verde stesse dimensioni, giallo verde e blu stessa area

Giallo e verde perché mediante movimenti rigidi possono essere sovrapposti l'uno all'altro

28

Ci sono rettangoli uguali tra questi? Se sì quali e perché?

Il verde e il giallo sono equivalenti

Giallo e rosso, sono solo di dimensioni diverse però sono uguali

beh secondo me prima bisogna chiedersi "uguali in cosa?"

Il giallo e il verde... ma uguali in che senso

Sì, quello giallo e quello verde, perché li possiamo sovrapporre e risulteranno congruenti.

Non ci sono rettangoli congruenti, in quanto tutti presentano lati di lunghezze differenti, tuttavia potrebbero avere la stessa area o lo stesso perimetro

no, perché non ci sono abbastanza elementi per dirlo

Probabilmente sono uguali il Verde ed il Giallo (sovrapponibili).

No

28

Ci sono rettangoli uguali tra questi? Se sì quali e perché?

Uguli

dipende da come si intende "uguali"

I rettangoli giallo e verde potrebbero essere uguali, ma bisognerebbe misurarne i lati

dipende come intendiamo per uguale

dipende dall'aria del rettangolo

Giallo e rosso sono sovrapponibili

si, il giallo e il verde perchè sono equivalenti, cambiano solo posizione

Secondo la definizione di uguaglianza no perchè non coincidono punto a punto.

Sì, perché non è detto che debbano essere congruenti

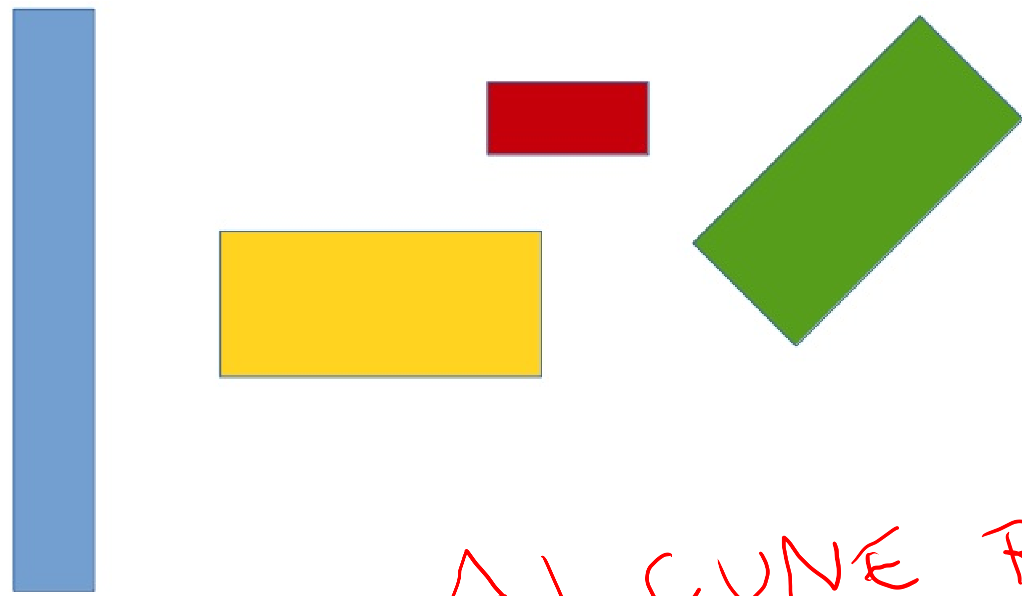
28

Ci sono rettangoli uguali tra questi? Se sì quali e perché?

congruenza

28

Ci sono dei rettangoli uguali tra questi? Se sì quali?



ALCUNE RISPOSTE:

Congruenti / sovrapponibili / equivalenti

DIPENDE

Dipende dal significato che diamo alla parola

UGUALI

Da (una traduzione degli) "Elementi" di Euclide (III secolo a.C.)

TERZA SORTA DI PRINCIPJ.

ASSIOMI.

I. Due cose se sono eguali ad una medesima cosa, sono eguali fra di lorò. Ed una medesima cosa se è maggiore, o minore dell' una di due cose eguali sarà eziandio maggiore, o minore dell' altra.

1) $a=b$ e $a=c$ allora $b=c$

2) $a=b \Rightarrow b=a$

3) $a=a$

Relazioni di equivalenza

Un esempio di relazione è

Il parallelismo.	La congruenza tra figure piane.	congruenza
proporzionalita	Avere la stessa età	similitudine
Congruenza, equiesetnsione, simlitudine	le funzioni	congruenza

13

Un esempio di relazione è

Mentimeter

proporzionalità.

avere la stessa cardinalità

.

simmetria, rotazione

13

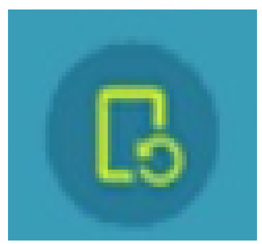
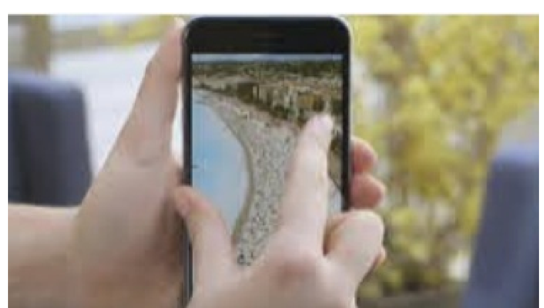
Alcune possibilità di = emerse

Congruenza / Similitudine

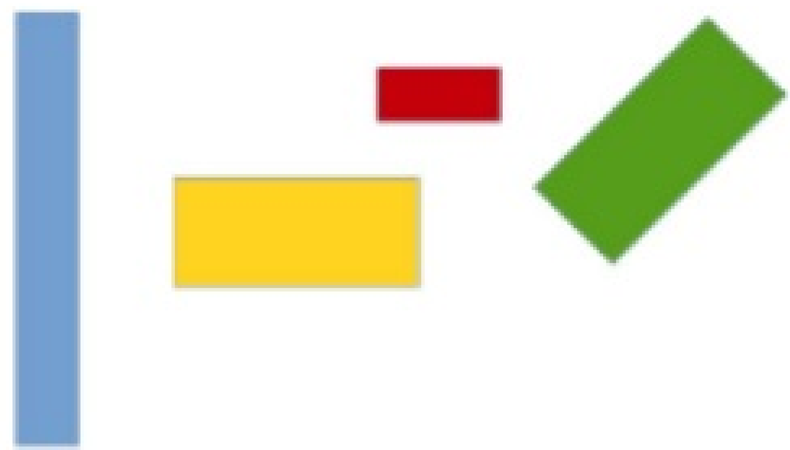
Coincidenza

Di cui ci occuperemo oggi.

Cosa posso fare ?

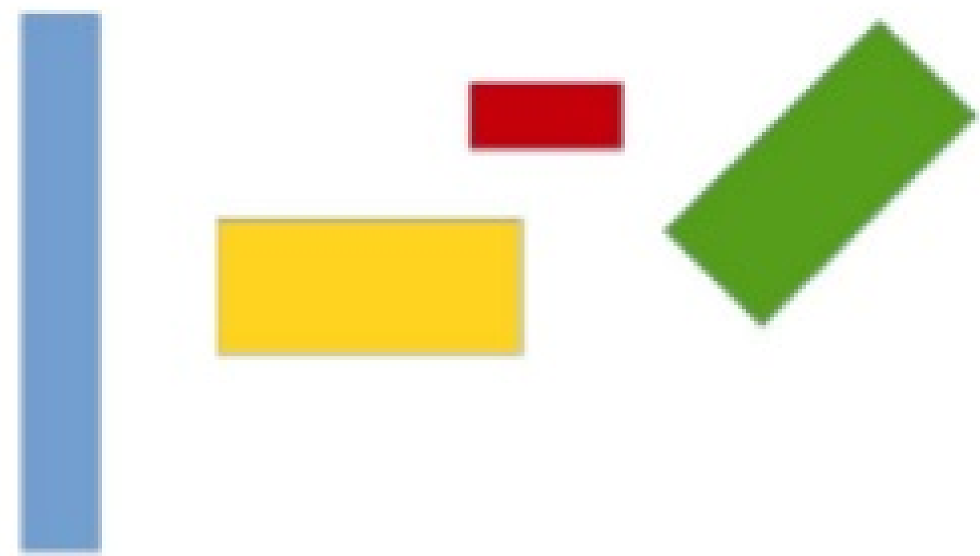
Coincidente	
Congruente	Rotazione  Simmetria  Traslazione 
Simile	Omotetia 

Torniamo ai nostri rettangoli



- **Coincidenti** Ogni rettangolo è = solo a sé stesso
- **Congruenti** $G =_c V$
- **Simili** $G =_s V =_s R$

Torniamo ai nostri rettangoli



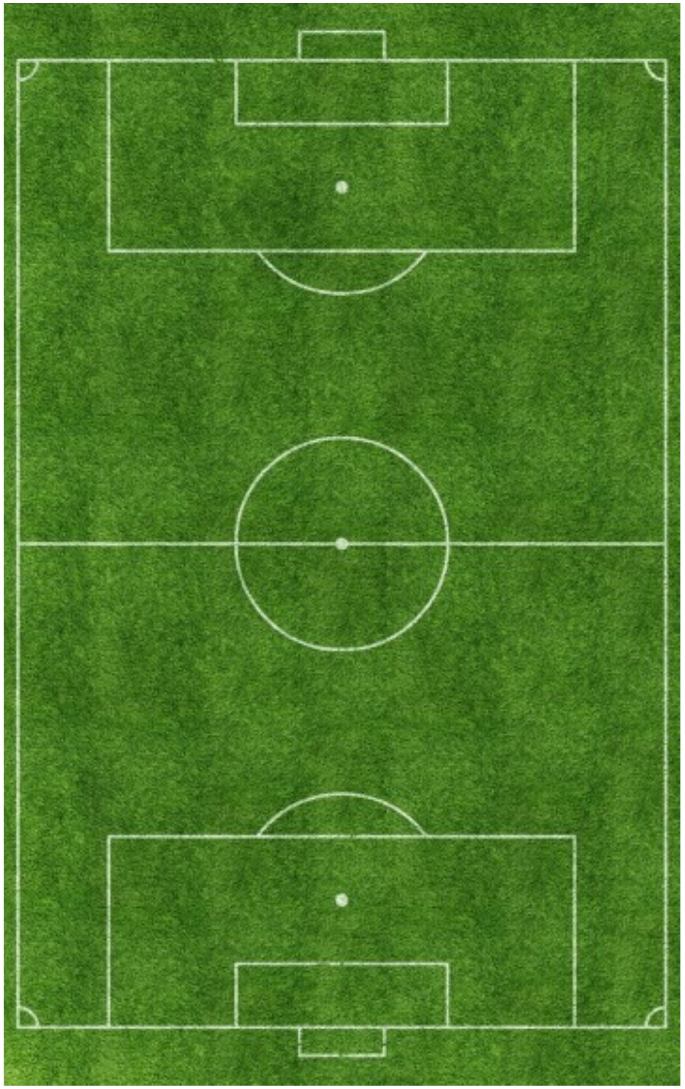
ESISTE UNA RELAZIONE $\star$ IN CUI

$$B =_{\star} G =_{\star} R =_{\star} V \ ?$$

Jules Henri Poincaré da *La science et l'hypothèse* (1902)

«**I matematici non studiano oggetti, ma relazioni fra oggetti;** per loro non fa nessuna differenza sostituire tali oggetti con altri, a patto che le relazioni non cambino. […] Che cos'è dunque la scienza? [...] è innanzitutto una **classificazione,** un modo di avvicinare fatti che le apparenze separavano benché fossero legati da qualche parentela naturale e nascosta. **La scienza, in altri termini, è un sistema di relazioni**.»

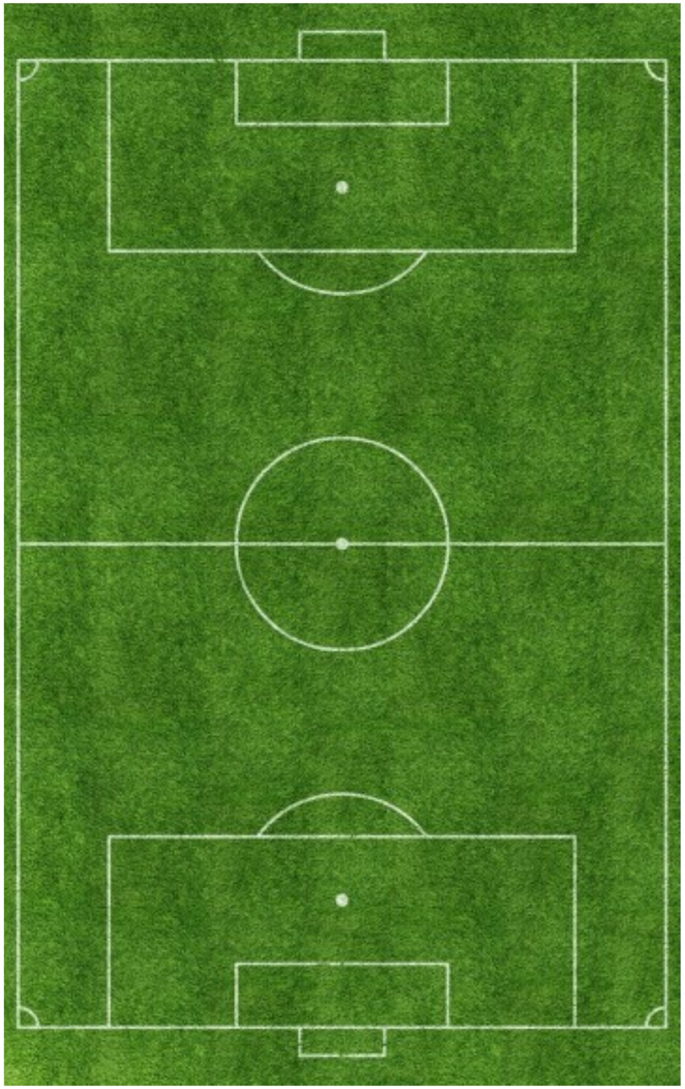
Quale tipo di = e'
meglio?



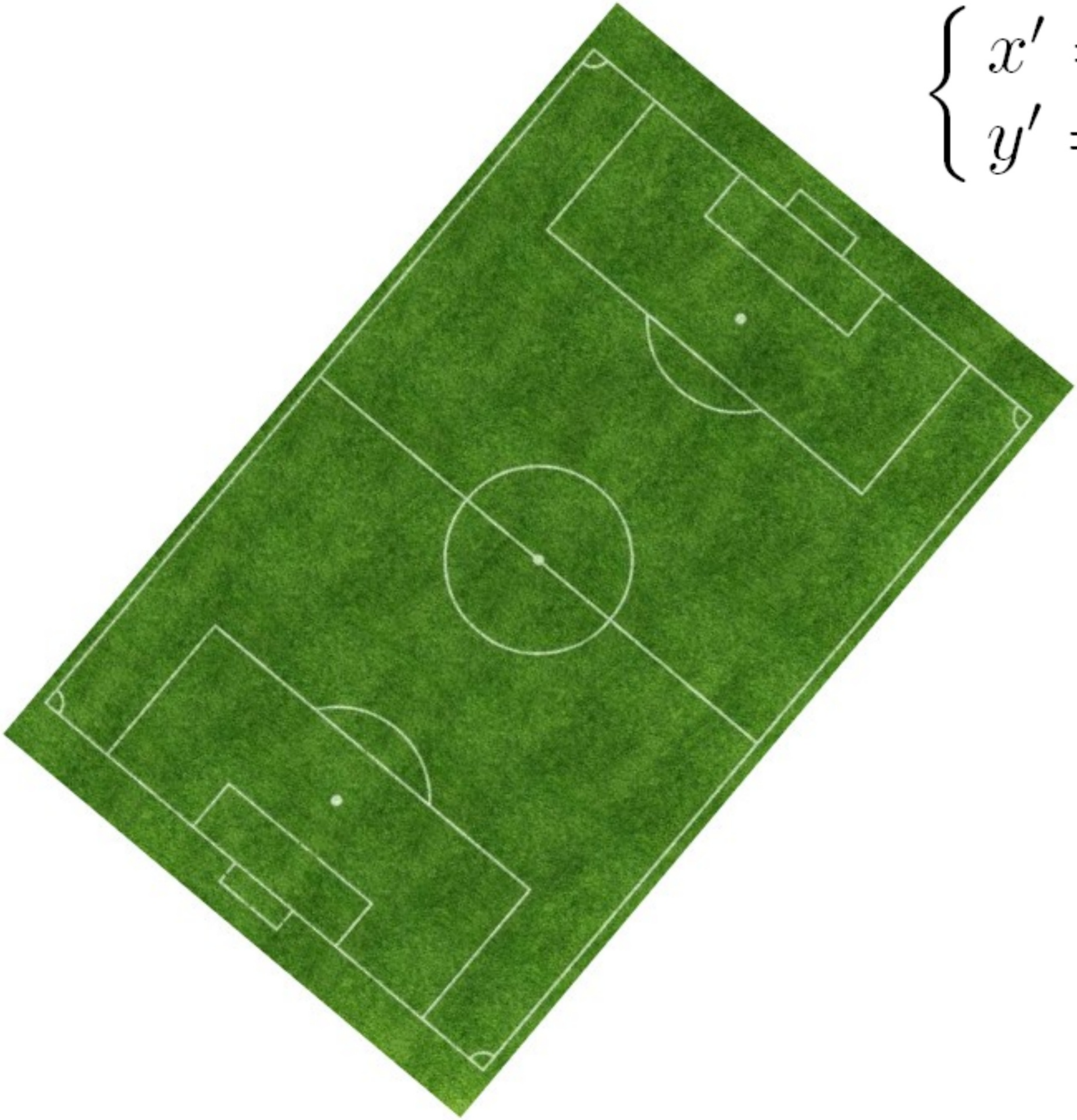
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Identità: coincidenza

$$\begin{cases} x' = x + e \\ y' = y + f \end{cases}$$



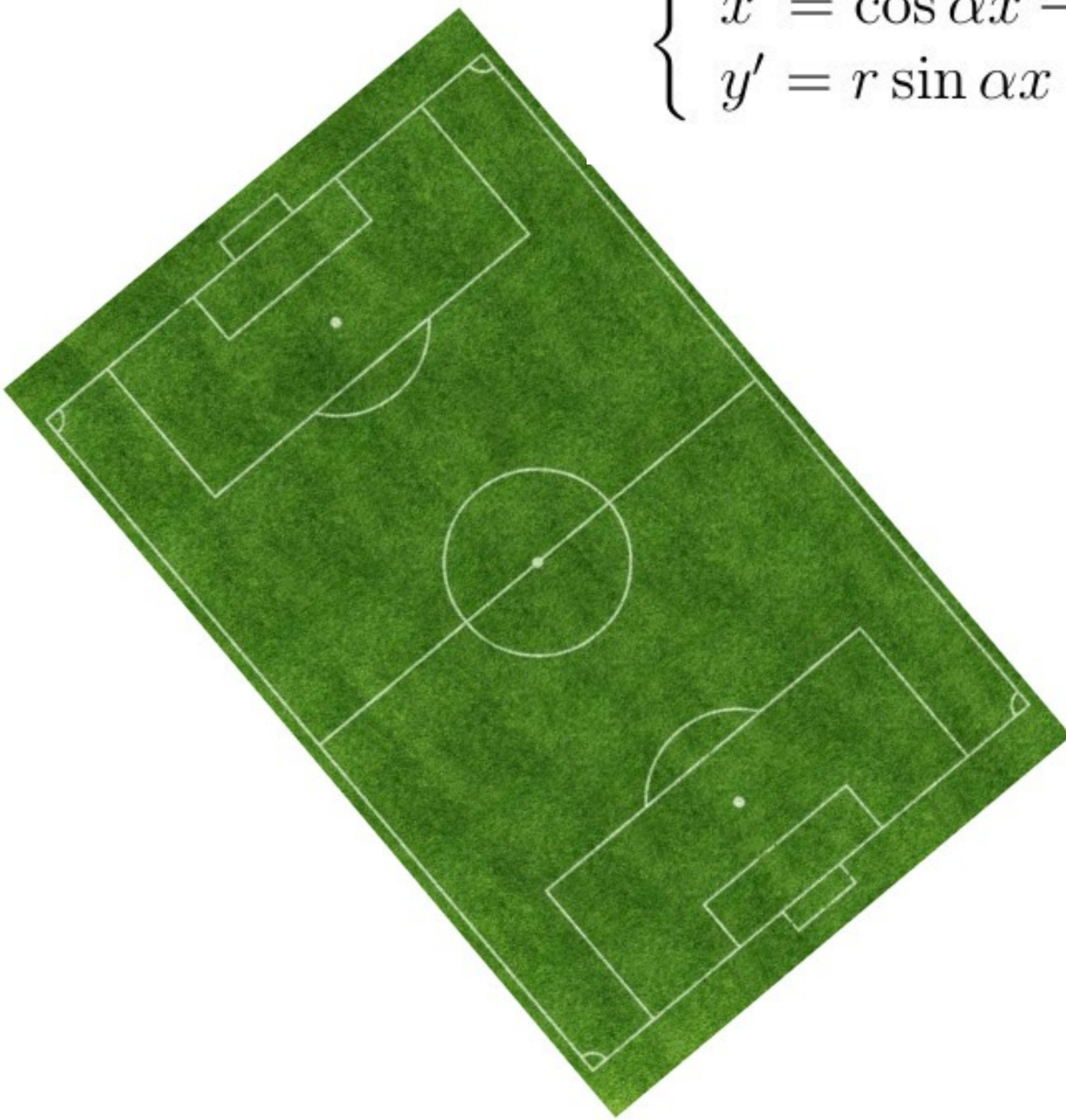
Traslazioni: equipollenza



$$\begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + e \\ y' = \sin\alpha x + \cos\alpha y + f \end{cases}$$

Movimenti rigidi: congruenza diretta

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha x - \sin\alpha y + e \\ y' = r\sin\alpha x + r\cos\alpha y + f \end{cases} \qquad r = \pm 1$$

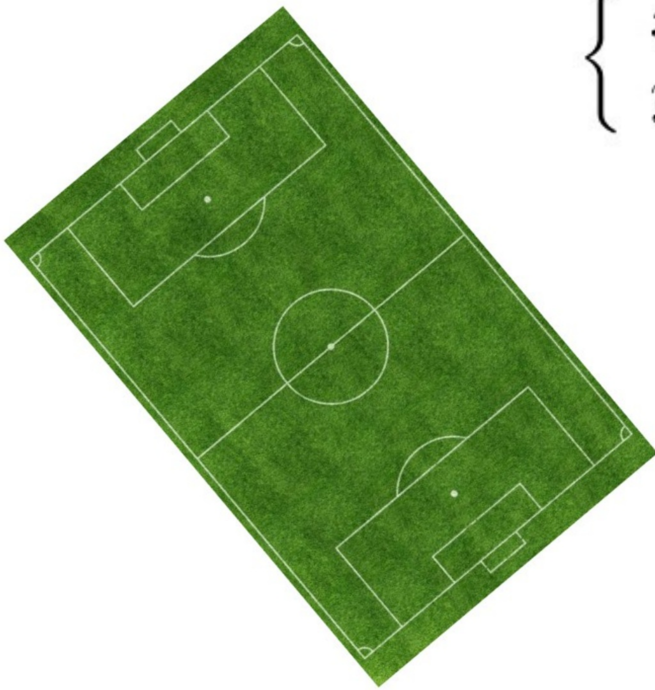


Isometrie: congruenza

$$\begin{cases} x' = h(\cos\alpha x - \sin\alpha y) + e \\ y' = h(r\sin\alpha x + r\cos\alpha y) + f \end{cases}$$

$r = \pm 1$

con $h \neq 0$



Similitudini (omotetie+isometrie): similitudine

Quale tipo di = e'
meglio?

Dipende!

«studiare
le forme appartenenti
alla varietà per quanto
concerne quelle
proprietà che
non si alterano nelle
trasformazioni del
gruppo dato»

Che cos'è una trasformazione geometrica piano?

Che cos'è una trasformazione geometrica?

Mentimeter

una traslazione

simmetria

è un distorcimento della figura

Una relazione equipollente tra i punti della figura di partenza e trasformata.

corrispondenza biunivoca del piano con se stesso

significa associare ad ogni punto della figura da trasformare un altro punto, tramite corrispondenza biunivoca

È un' operazione che modifica la figura piana modificandone la posizione, l'inclinazione, ne fa una simmetria assiale o centrale......

Manipolare un oggetto senza "romperlo". Ad esempio disegno qualcosa su un foglio di carta e poi lo appallottolo senza strapparlo.

8

«studiare
le forme appartenenti
alla varietà per quanto
concerne quelle
proprietà che
non si alterano nelle
trasformazioni del
gruppo dato»

Che cos'è una trasformazione geometrica piano?

Una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano

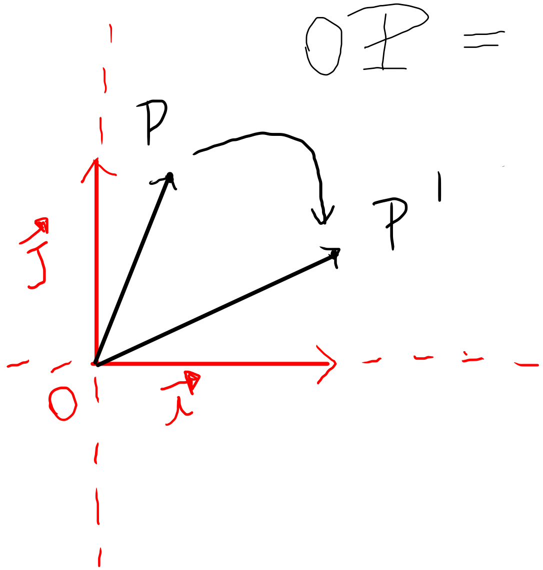
$P \longleftrightarrow P'$

a

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} \longleftrightarrow \overrightarrow{OP'}$

a b

$(x, y) \longleftrightarrow (x', y')$



a) O PUNTO FISSATO

b) $\vec{i}, \vec{j}$ VETTORI FISSATI $\perp$ CON LA STESSA LUNGHEZZA

Insieme di funzioni

$$R = \{ f : \Pi \longrightarrow \Pi \} \qquad \Pi \text{ piano}$$

$\updownarrow$ a e b

$$\mathcal{R} = \{ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \}$$

«studiare
le forme appartenenti
alla varietà per quanto
concerne quelle
proprietà che
non si alterano nelle
trasformazioni del
gruppo dato»

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & P' \arrow[r, "g"] & P'' \end{tikzcd}$$

È possibile concatenare le funzioni componendole in modo che

$(A, \circ)$

GRUPPO

I) identità $= 1 : P \to P \qquad 1 \in R$

II) $\forall f \in R \quad f : P \to P' \Longrightarrow \exists f^{-1} \in R \quad f^{-1} : P' \to P$

(cioè $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1$)

III) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Se dati $F, F' \subseteq \Pi$ figure definiamo

$$F =_R F' \Longleftrightarrow \exists\, g \in R \text{ t.c. } f(F) = F'$$

$=_R$ è UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA.

Attenzione all'ordine

https://www.geogebra.org/m/jtq9srsc

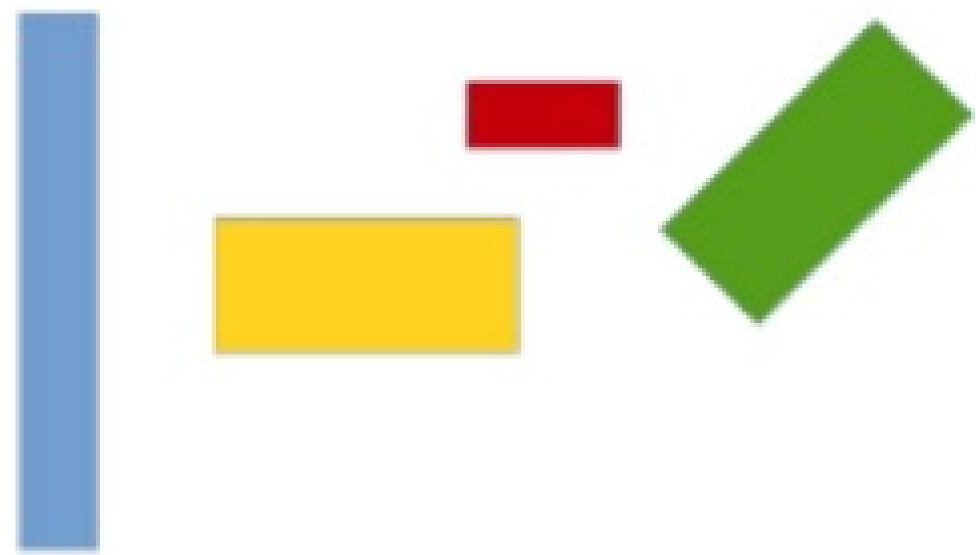
https://www.geogebra.org/m/hpbxfspr

Attenzione all'ordine

https://www.geogebra.org/m/jtq9srsc

https://www.geogebra.org/m/hpbxfspr

Torniamo ai nostri rettangoli

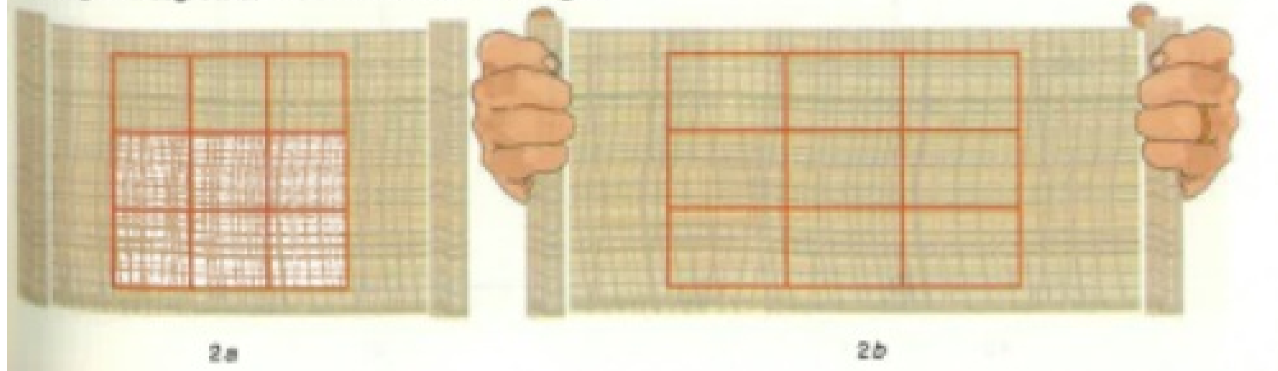


ESISTE UNA RELAZIONE $\star$ IN CUI

$$B =_\star G =_\star R =_\star V \; ?$$

Dobbiamo poter stirare---

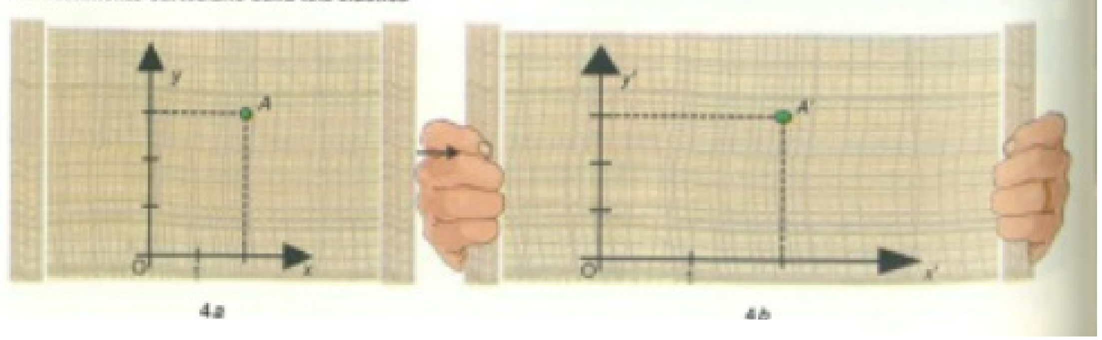
Figura 2
Una figura disegnata su una tela elastica viene allungata



$$\begin{cases} y' = ny \\ x' = mx \end{cases}$$

$$\Uparrow \; f_m \circ g_n$$

Figura 4
Un riferimento cartesiano sulla tela elastica



$$f_m \begin{cases} y' = y \\ x' = mx \end{cases}$$

$$g_n \begin{cases} y' = ny \\ x' = x \end{cases}$$

"Matematica oggi"

Emma Castelnuovo

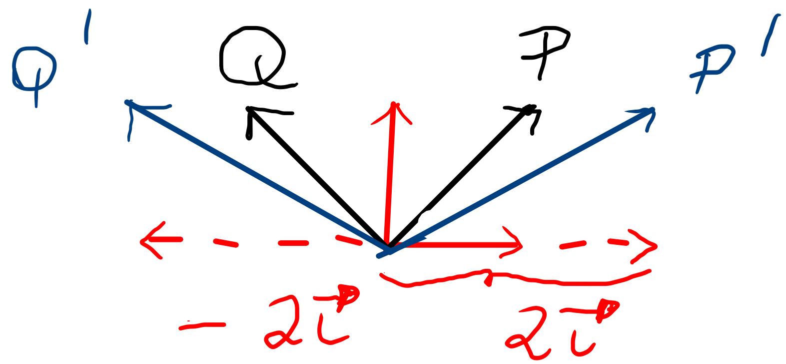
http://www.matemat.it/page-2/

Questi stiramenti conservano gli angoli?

$$f_2 \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$$

$P \leftrightarrow (1,1) \longrightarrow (2,1) \leftrightarrow P'$

$Q \leftrightarrow (-1,1) \longrightarrow (-2,1) \leftrightarrow Q'$



$P \in$ retta equaz. $x = y$
$Q \in$ retta equaz. $x = -y$ } $\perp$

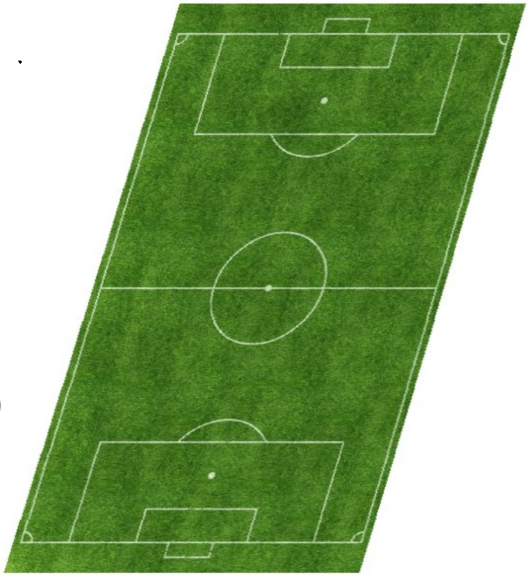
$P' \in$ retta equaz. $2y = x$
$Q' \in$ retta equaz. $2y = -x$ } non $\perp$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{QOP} &= \pi/2 \\ \widehat{Q'OP'} &\neq \pi/2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{No!}$$

Piu' in generale

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

(mettendo gli stiramenti insieme alle altre trasformazioni)



$$ad - bc \neq 0$$

Garantisce trasformazioni biunivoche

b

SISTEMA di CRAMER

https://www.youtube.com/watch?v=jBsC34PxzoM

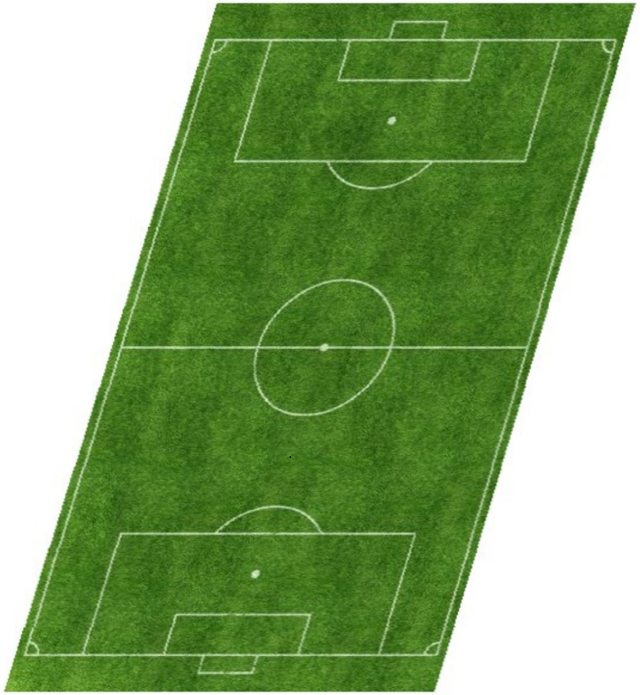
Affinità: equivalenza affine

Cosa rimane invariato?

- le rette vanno in rette
- le parallele vanno in parallele

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \qquad (*)$$

$$ad - bc \neq 0$$



https://www.youtube.com/watch?v=jBsC34PxzoM

Affinità: equivalenza affine

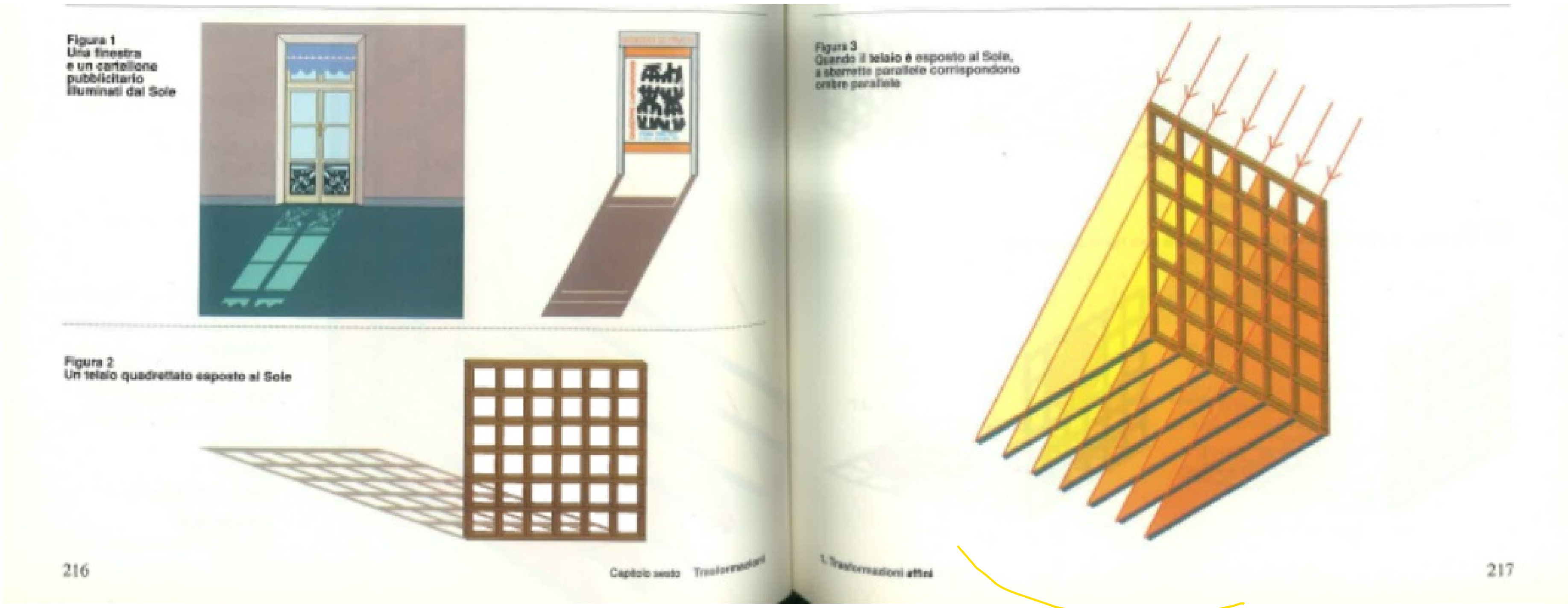


Figura 1
Una finestra
e un cartellone
pubblicitario
illuminati dal Sole

Figura 2
Un telaio quadrettato esposto al Sole

Figura 3
Quando il telaio è esposto al Sole,
a sbarrette parallele corrispondono
ombre parallele

216 Capitolo sesto Trasformazioni

1. Trasformazioni affini 217

"Matematica oggi"

Emma Castelnuovo

http://www.matemat.it/page-2/

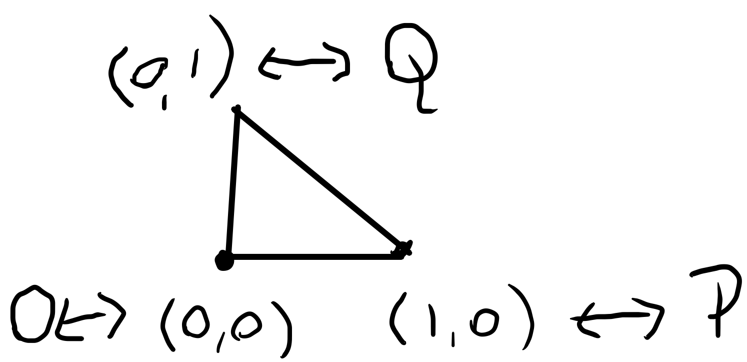
Giochiamo un po'

https://www.geogebra.org/m/BHw6fDmB

per vedere cosa possiamo fare.

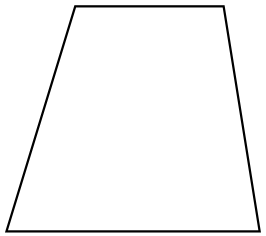
<u>PROP</u>: Tutti i parallelogrammi sono affinemente equivalenti.

Suggerimento:



- controllo dove vanno a finire O, P, Q con ☆
- uso la proprietà transitiva per dire che tutti i triangoli sono affinemente equivalenti
- trovo un triangolo che determina univocamente il parallelogramma

E i trapezi?

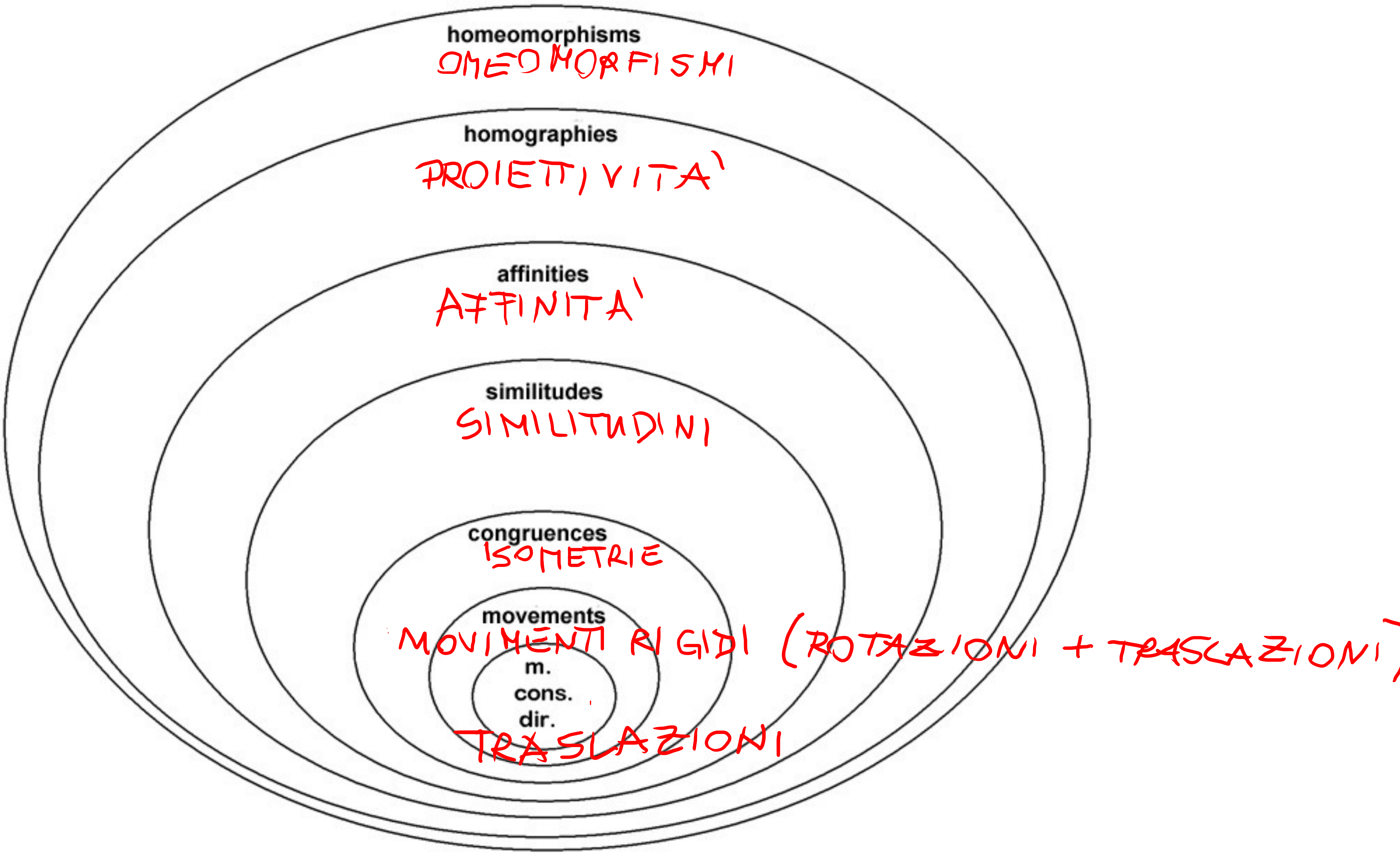


Dato che le affinità mandano rette // in rette // non possono mandare un parallelogramma in un trapezio diverso da un parallelogramma.

Una geometria è un insieme con un **gruppo di trasformazioni.**

«studiare
le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che
non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato»

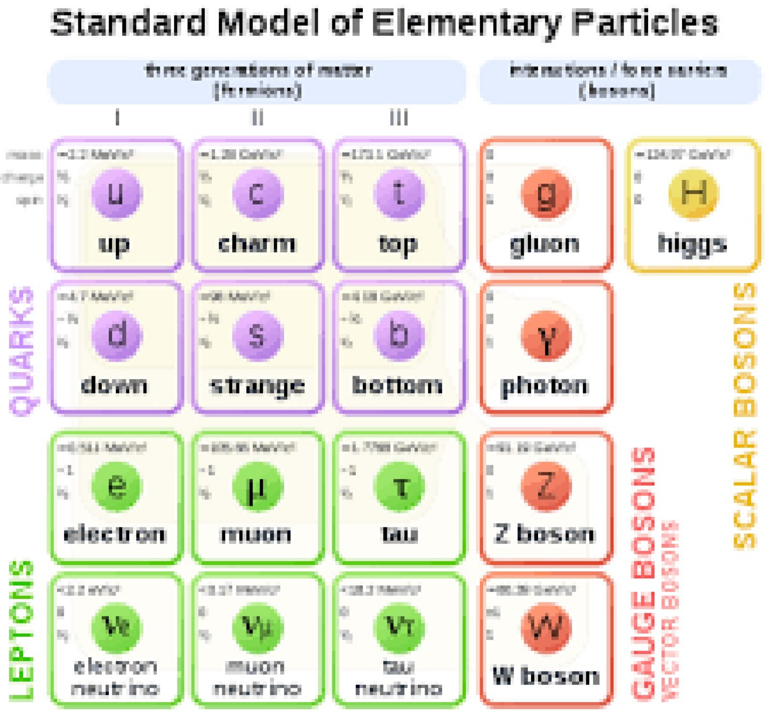
Studiare la geometria significa studiare le proprietà **invarianti** per il gruppo di trasformazioni e determina le **“simmetrie”** dei sottoinsiemi.


homeomorphisms
OMEOMORFISMI
homographies
PROIETTIVITÀ
affinities
AFFINITÀ
similitudes
SIMILITUDINI
congruences
ISOMETRIE
movements
MOVIMENTI RIGIDI (ROTAZIONI + TRASLAZIONI)
m.
cons.
dir.
TRASLAZIONI

L'impatto dell'impostazione di Klein

non solo in geometria

Il teorema
di Emmy Noether
Invariante Variationsprobleme (1918)



Se un sistema fisico è invariante sotto alcuni gruppi di trasformazioni continue, allora da ciascuna proprietà di simmetria segue la conservazione di una quantità fisica del sistema.

Mirella Manaresi

"Emmy Noether, Grete Hermann e la nascita della computer algebra"

giovedì 14 gennaio 2021 ore 16-18

La computer algebra, chiamata anche calcolo simbolico, è il settore della matematica, nato alla fine degli anni settanta, che studia e sviluppa algoritmi e software per manipolare espressioni algebriche. Oggi Grete Hermann, la prima studentessa di dottorato di Emmy Noether (grandissima matematica del secolo scorso), è considerata una pioniera di questo settore, per un lavoro tratto dalla sua tesi di dottorato e pubblicato nel 1926. Il lavoro della Hermann nasce da un problema posto da Emmy Noether e per più di trent’anni è stato ignorato dalla comunità scientifica.

Per il secondo incontro:

TROVERETE INFO SUL

SITO PLS E

VI ARRIVERANNO

INFORMAZIONI via

MAIL

Grazie per

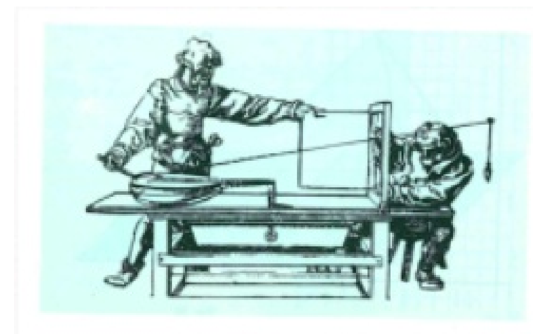
l'attenzione

Per chi vuole
esplorare un po'
i "cerchi" più
esterni.

Figura 7
Quando si illumina il telaio con un proiettore non si ha una trasformazione affine

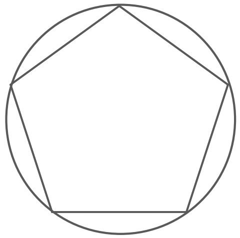
$$\begin{cases} x' = ax + by + et \\ y' = cx + dy + ft \\ t' = gx + hy + kt \end{cases}$$

$$adk + bfg + ech - edg - afh - bck \neq 0$$



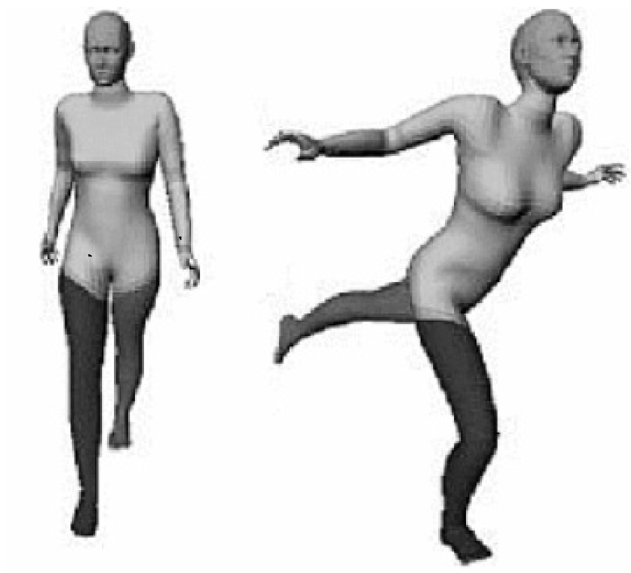
Proiettività: equivalenza proiettiva

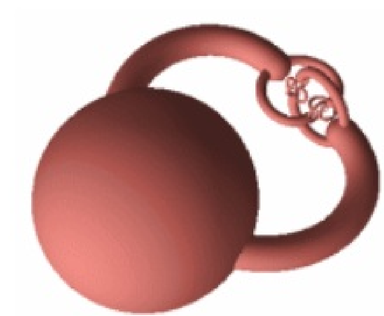
Gli omeomorfismi

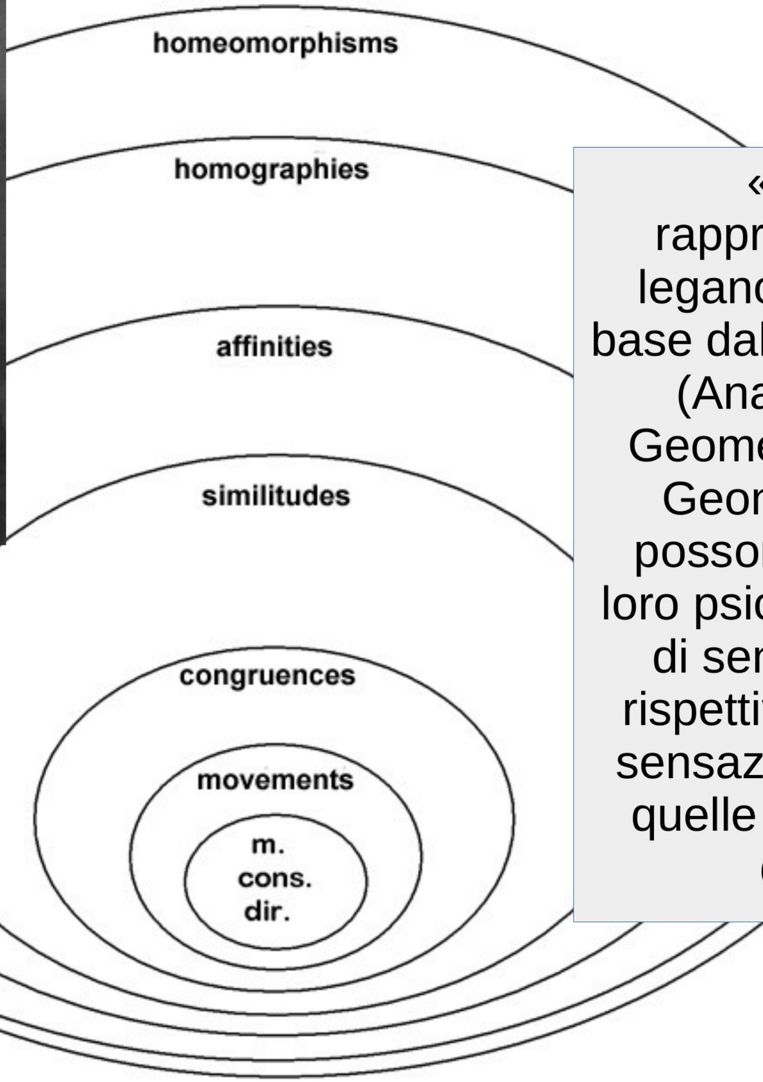


tutti i poligoni sono omeomorfi
tra loro.

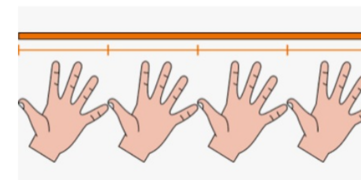
Ancora figure omeomorfe







«I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base dalla teoria del continuo (Analysis situs), della Geometria metrica e della Geometria proiettiva si possono coordinare nella loro psicogenesi a tre gruppi di sensazioni, che sono rispettivamente le generali sensazioni tattili-muscolari, quelle del tatto speciale e della vista.»



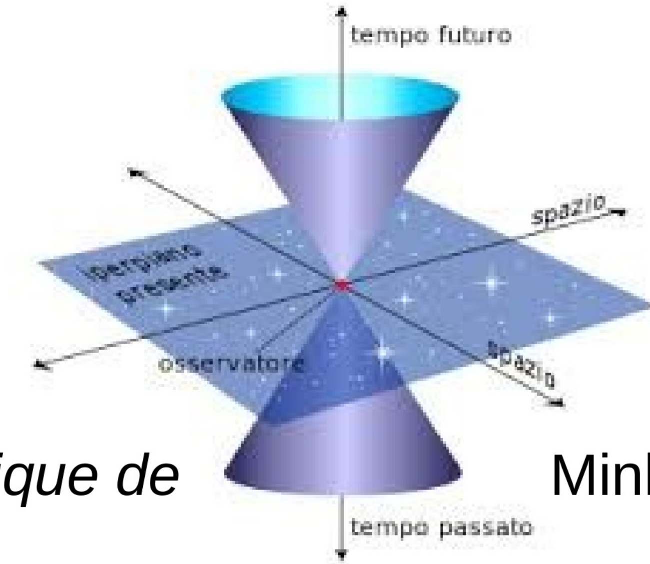
Federigo Enriques *Problemi della Scienza* (1906)

«Il programma di Klein è tipicamente ad un **metalivello** poiché ogni geometria conserva la sua autonomia, ma […] anche […] perché **la geometria non è più legata a determinati oggetti geometrici e l'enfasi viene posta su concetti più astratti, quali quello di gruppo.**
Il programma di Erlangen **ha avuto inoltre una profonda influenza sullo sviluppo della geometria**: una ricerca geometrica, di regola, deve precisare in quale geometria si colloca.
E' tipico dei mutamenti rivoluzionari suscitare nuove classi di problemi: questo è accaduto nel nostro caso.»
(Francesco Speranza)

La *rivoluzione silenziosa*

«**L'influenza del programma di Erlangen,** dapprima limitata, **divenne poi universale, caratterizzando l'impostazione generale di tutti i corsi universitari di geometria.** Klein d'altronde svolse ininterrottamente per circa mezzo secolo attività di insegnamento e divulgazione esercitando un forte influsso sugli ambienti pedagogici a vari livelli.» (Maria Teresa Borgato)

Altre applicazioni in fisica moderna



Poincaré da *Sur la dynamique de l'électron* (1905)

Minkowski da *Space and Time* (1908)

«L'ensamble de toutes ces transformations, joint à l'ensamble de toutes le rotations de l'espacedoit formes un groupe; mais pour qu'il en soit ainsi, il faut que l =1; on est donc conduit à supposer l =1 et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenue par une autre voie.»

«The equations of Newton's mechanics exhibit a two-fold invariance.
Their form remains unaltered, rstly, if we subject the underlying system of spatial co-ordinates to any arbitrary change of position; secondly, if we change its state of motion, namely, by imparting to it any uniform translatory motion.»