LE RADICI SUL COMPUTER

come fanno i computer a calcolare la radice quadrata?

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Davide Palitta, Germana Landi
{davide.palitta, germana.landi}@unibo.it

Dipartimento di Matematica, Centro AM^2
Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Di cosa parleremo?

le RADICI sul COMPUTER

Due aspetti differenti:

- un **problema matematico** da affrontare
- il **calcolatore** come *mezzo* per la sua risoluzione

questo è un laboratorio di
Calcolo Numerico

ma cosa fa un *Matematico Numerico*?

- **Analizza** il problema matematico

  Esiste almeno una soluzione? Esiste un'unica soluzione?

ma cosa fa un *Matematico Numerico*?

- **Analizza** il problema matematico

  Esiste almeno una soluzione? Esiste un'unica soluzione?

- Individua un **procedimento** per la sua risoluzione

  Come posso ideare un procedimento in grado di calcolare una soluzione?

ma cosa fa un *Matematico Numerico*?

- **Analizza** il problema matematico

  Esiste almeno una soluzione? Esiste un'unica soluzione?

- Individua un **procedimento** per la sua risoluzione

  Come posso ideare un procedimento in grado di calcolare una soluzione?

- **Implementa** il procedimento al calcolatore

  Come posso "tradurre" quel procedimento e "metterlo" sul calcolatore?

Indice

Radicali e loro proprietà

Dato $n \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$ ($a \geqslant 0$ se n è pari), viene definita radice ennesima di a quel numero x, se esiste, tale che

$$x^n = a$$

e scriviamo

$$x = \sqrt[n]{a}$$

- L'operazione con la quale viene determinata x si chiama estrazione di radice che è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza
- $\sqrt{}$ è il simbolo dell'estrazione di radice
- n è detto indice del radicale
- a è detto radicando

Radicali e loro proprietà

I **radicali** godono delle seguenti proprietà:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Radice quadrata e un po' della sua storia

Noi ci concentreremo sul calcolo della **radice quadrata**, cioè supporremo sempre che l'indice del radicale sia 2 ($n = 2$): $\sqrt{a}$

- il simbolo di radice $\surd$ è stato introdotto dal matematico tedesco Christoff Rudolf nel 1525
- René Descartes (Cartesio) nel 1637 introdusse l'uso del *vinculum* (la lineetta sopra): $\sqrt{2}$
- Il posizionamento del radicale venne proposto da Albert Girard nel 1629, notazione usata inizialmente solo per la radice cubica: $\sqrt[3]{2}$

Cos'è un algoritmo?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

Cos’è un algoritmo?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = ?$$

Cos'è un algoritmo?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2 \quad \text{FACILE!}$$

Cos'è un algoritmo?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1225} = ?$$

Cos'è un algoritmo?

Come calcoliamo la radice quadrata di un numero?

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1225} = ?$$

$$\begin{array}{r|l} 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1225 = 5^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{1225} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2} = 35$$

Cos'è un algoritmo?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = ?$$

Cos'è un algoritmo?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \approx 1.66666\ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714\ldots$$

Cos'è un algoritmo?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \approx 1.66666\ldots$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714\ldots$$

Ma quindi calcoliamo la soluzione esatta o una soluzione approssimata?

Cos'è un algoritmo?

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6} \approx 1.66666...$$

$$\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7} \approx 0.14285714...$$

Ma quindi calcoliamo la soluzione esatta o una soluzione approssimata?

- **quadrati perfetti**: la loro radice quadrata è un numero intero (soluzione esatta)
- **quadrati imperfetti**: la loro radice quadrata è un numero decimale, illimitato e non periodico (soluzione approssimata)

Cos'è un algoritmo?

Applichiamo un ALGORITMO!

In matematica un algoritmo è la specificazione di una sequenza finita di operazioni (dette anche istruzioni) che consente di risolvere tutti i quesiti di una stessa classe o di calcolare il risultato di un'espressione matematica. Un algoritmo deve essere

- **finito**: è costituito da un numero finito di istruzioni e deve sempre terminare;
- **eseguibile**: tutte le istruzioni devono essere eseguibili;
- **non ambiguo**: le operazioni non devono poter essere interpretate in modi differenti;
- **generale**: deve essere applicabile a tutti i problemi della classe a cui si riferisce, o ai casi dell'espressione matematica.

E un algoritmo iterativo?

Per il calcolo della radice quadrata (e per molti altri problemi) noi applicheremo un algoritmo iterativo

- Partendo da un *iterato iniziale* x_0, si applicano un certo numero di istruzioni per ottenere un nuovo *iterato* x_1
- Le stesse operazioni si applicano ad x_1 per ottenere x_2
- Si ripete il procedimento per un certo numero di volte dette iterazioni
- Alla k-esima iterazione ci fermiamo se l'iterato ottenuto x_k soddisfa certe condizioni

Se f è una funzione che rappresenta le istruzioni che applichiamo ad ogni iterazione, allora possiamo scrivere il nostro algoritmo ricorsivo come

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Il metodo di Erone

Un algortimo ricorsivo per il calcolo della radice quadrata di un numero è il metodo di Erone

Dato $a \geqslant 0$, vogliamo calcolare x tale

$$x = \sqrt{a}$$

Ingredienti di un algoritmo iterativo:

- Un iterato iniziale x_0
- Una f, cioè le giuste istruzioni da applicare ad ogni iterazione
- Decidere a che iterazione fermarci

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come scegliereste l'iterato iniziale x_0?

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come scegliereste l'iterato iniziale x_0?

- Nel metodo di Erone vogliamo avere un x_0 tale che

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

- Ma noi non conosciamo $\sqrt{a}$!

Scelta dell'iterato iniziale nel metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Come sceglieresti l'iterato iniziale x_0?

- Nel metodo di Erone vogliamo avere un x_0 tale che

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

- Ma noi non conosciamo $\sqrt{a}$!
- Possiamo trovare il primo quadrato perfetto $b = c^2$ più grande di a ($b > a$) e scegliere $x_0 \approx c$. In questo modo x_0 sarà vicino a $\sqrt{a}$

Esempio: $a = 7$, il primo quadrato perfetto è $b = 9 = 3^2$ e quindi posso scegliere $x_0 > 3 \approx \sqrt{7} \approx 2.645$

Iterazione del metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Quali sono le *istruzioni giuste* da eseguire ad ogni iterazione?

https://www.geogebra.org/m/jadvbmpc

https://www.geogebra.org/classic/fg5ghpad

Errore di approssimazione

$$x = \sqrt{a}$$

Il metodo di Erone ci fornisce due approssimazioni di $\sqrt{a}$:

- approssimazione per eccesso (le basi dei rettangoli)
- approssimazione per difetto (le altezze dei rettangoli)

Errore di approssimazione

$$x = \sqrt{a}$$

Il metodo di Erone ci fornisce due approssimazioni di $\sqrt{a}$:

- approssimazione per eccesso (le basi dei rettangoli)
- approssimazione per difetto (le altezze dei rettangoli)

Dopo un certo numero di iterazioni dobbiamo necessariamente fermarci: non possiamo andare avanti all'infinito!

Errore di approssimazione

Iterazione del metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Quindi, dato x_0, l'iterazione del metodo di Erone può essere scritta come

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k \geqslant 0$$

cioè

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

è la funzione che descrive le istruzioni che il nostro algoritmo iterativo deve compiere ad ogni iterazione

Proprietà del metodo di Erone

$$x = \sqrt{a}$$

Quindi, dato x_0, l'iterazione del metodo di Erone può essere scritta come

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad k \geqslant 0$$

Se $x_0 \geqslant \sqrt{a}$, il metodo di Erone gode delle seguenti proprietà

- tutti gli iterati x_k sono positivi
- $x_k > x_{k+1}$ per ogni $k \geqslant 0$
- $x_k \to \sqrt{a}$ per $k \to +\infty$
- $x_k - \sqrt{a} < \dfrac{x_0 - \sqrt{a}}{2^k}$
- $x_{k+1} - \sqrt{a} < x_k - x_{k+1}$

Ma quando ci fermiamo?

L'ultimo ingrediente che ci manca per il nostro algoritmo iterativo è il

CRITERIO D'ARRESTO

cioè dobbiamo capire quando fermarci: **non possiamo andare avanti all'infinito!**

- Per oggi abbiamo fermato il nostro algoritmo dopo un certo numero di iterazioni (2,3,...)
- Questo è un criterio d'arresto che viene usato spesso ma non ci dà informazioni sulla *bontà* della nostra soluzione
- Le proprietà del metodo di Erone possono essere usate per definire altri criteri di arresto