6. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine con coefficienti costanti

Una equazione differenziale che possa scriversi nel modo seguente

(38) $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$, funzione continua, si chiama equazione differenziale lineare del secondo ordine con coefficienti costanti.

Equazioni come la (38) compaiono nei modelli differenziali di vari fenomeni, i più noti fra i quali sono i seguenti:

(i) moto di caduta dei gravi, senza e con attrito;

(ii) moto di un oscillatore armonico,

i.e., moto di un sistema meccanico che reagisce ad una perturbazione dell'equilibrio con una accelerazione proporzionale allo spostamento subito;

(iii) piccole oscillazioni del pendolo;

(iv) correnti elettriche in un circuito RLC.

L'equazione (38), se $b(t) \equiv 0$, prende la forma

$$(39) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Questa si chiama <u>equazione omogenea associata</u> della (38).

Una soluzione della (38) è, per definizione, una funzione

$$u : I \to \mathbb{R}$$

derivabile due volte in ogni punto di I, con $t \mapsto u''(t)$ continua su I

(i.e., $u \in C^{(2)}(I)$) e tale che

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = b(t)$$

per ogni $t \in I$.

NOTA. Per equazioni come la (38) non si verificano — come vedremo — fenomeni di esplosione in tempi finiti delle soluzioni. Infatti: ogni soluzione di (38) è "naturalmente" definita su tutto I, lo stesso dominio delle funzione b. Per questa ragione richiediamo a priori che le soluzioni abbiano I come dominio di definizione.

Osservazione (cruciale) Se u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea (39) allora

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

è soluzione della (39), per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Questa affermazione - la cui verifica è quasi immediata - è conseguenza della dipendenza lineare, rispetto a y, y' e y'', del primo membro della (39).

6.a - Integrale generale della (39)

L'idea cruciale per la determinazione di tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (39) è, insieme alla precedente osservazione, la seguente:

la derivazione della funzione $t \longmapsto e^{\lambda t}$ è equivalente ad una operazione di moltiplicazione. Infatti, com'è ben noto,

$$(e^{\lambda t})'' = \lambda e^{\lambda t}, \quad (e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Di conseguenza, $t \longmapsto e^{\lambda t}$ è soluzione della (39) se e solo se

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Questo avviene se e solo se

(40) $\qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$

Il polinomio

(41) $\qquad P(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

si chiama <u>polinomio caratteristico</u> dell'equazione (39).

L'equazione (40) può avere radici complesse. Per questo, sono opportuni alcuni richiami.

• <u>RICHIAMI</u>: <u>ESPONENZIALE COMPLESSO</u>

Se $\lambda = \alpha + i\beta$ è un numero complesso con $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$ e $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$ si definisce

$$e^{\lambda} := e^{\alpha}(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta).$$

Da questa, nel caso di $\alpha = 0$, segue

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta;$$

e quindi $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta}$

Dalle proprietà di omomorfismo degli esponenziali reali e delle formule di addizione delle funzioni seno e coseno, si ottiene

$$e^{\lambda+\mu} = e^{\lambda} e^{\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Consideriamo ora la funzione a valori complessi

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$$

Definiamo

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} := \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(e^{\lambda t}) + i \frac{d}{dt} \operatorname{Im}(e^{\lambda t})$$

In termini espliciti

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\cos\beta t\right) + i \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\right)$$

Da queste si trae facilmente

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha+i\beta)\, e^{(\alpha+i\beta)t}$$

<u>Conclusione</u>. Anche per $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \quad (e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Riprendiamo ora il problema della determinazione dell'integrale generale della (39). Per maggior chiarezza è opportuno esaminare separatamente alcune diverse eventualità.

E1. L'equazione caratteristica (40) ha due radici reali distinte λ_1 e λ_2

In questo caso l'integrale generale della (39) è dato dalla seguente formula

(42) $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

con c_1 e c_2 costanti reali.

Precisamente: per ogni scelta delle costanti reali c_1 e c_2 la funzione u in (42) è soluzione della (39)

Questa affermazione segue immediatamente dalla osservazione a pagina 78 e dal fatto che $t \mapsto e^{\lambda t}$ è soluzione di (39) se (e solo se) λ è radice del polinomio caratteristico (41) (vedi pagg 79-80)

Viceversa: se u è una soluzione di (39) allora esistono c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La dimostrazione di questa affermazione richiede alcune non immediate considerazioni. La rinviamo ad altro paragrafo per non spezzare qui il filo della nostra presente argomentazione

E 2: L'equazione caratteristica (40) ha una radice doppia.

Se λ è la radice doppia di (40) allora $\lambda = -\frac{a_1}{2}$ (e $\frac{a_1^2}{4} = a_0$). In questo caso l'<u>integrale generale</u> della (39) è dato dalla seguente formula

(43) $u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$

con c_1 e c_2 costanti reali

<u>Precisamente</u>: per ogni scelta delle costanti reali c_1 e c_2 la funzione u in (43) è soluzione della (39).

Per dimostrare questa affermazione, grazie alla Osservazione a pagina 78, basta riconoscere che $t \mapsto e^{\lambda t}$ e $t \mapsto t e^{\lambda t}$ sono soluzioni di (39)

Sappiamo già che la prima di queste due funzioni è soluzione di (39) in quanto λ è una radice del suo polinomio caratteristico. Basta quindi dimostrare che $v(t) = t e^{\lambda t}$ è soluzione di (39). Ora:

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) =$$
$$e^{\lambda t}(\lambda^2 t + 2\lambda) + e^{\lambda t} a_1 (\lambda t + 1) +$$
$$e^{\lambda t} a_0 t = t e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) +$$
$$e^{\lambda t}(2\lambda + a_1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

in quanto $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ e $\lambda = -\frac{a_1}{2}$.
Resta così dimostrato che la funzione u in (43) è soluzione di (39), qualunque siano le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Viceversa: se u è una soluzione di (39) allora esistono due costanti reali c_1 e c_2 tali che

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostreremo anche questa affermazione in un successivo paragrafo.

E3: <u>L'equazione caratteristica (40) non ha radici reali</u>

In questo caso le radici di (40) sono del tipo seguente

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Sappiamo che, come nel caso di $\lambda \in \mathbb{R}$, le funzioni a valori complessi

$$(44) \qquad t \mapsto e^{\lambda_1 t} \quad e \quad t \mapsto e^{\lambda_2 t}$$

sono soluzioni (complesse) della equazione differenziale (39). Allora, come è facile riconoscere, poichè i coefficienti di (39) sono reali, anche le parti reali e le parti immagimarie di (44) sono soluzioni di (39).

Quindi, essendo

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$$

e

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$$

le funzioni

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad , \quad u_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

sono soluzioni di (39).

Ne viene che l'<u>integrale generale</u> di (39) è dato dalla formula

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \tag{45}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Che ogni funzione del tipo (45) sia soluzione di (39) segue dalla osservazione a pagina 78 e dal fatto che u_1 e u_2 sono soluzioni di (39).

Il viceversa, e cioè che ogni soluzione di (39) si scrive come nella (45), per opportune costanti reali c_1 e c_2, verrà dimostrato in un successivo paragrafo.

6.6 - Integrale generale dell'equazione non omogenea (38).

Tutte e sole le soluzioni della equazione

$$(38) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

sono date dalla formula seguente

$$(46) \qquad u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

ove $c_1 u(t) + c_2 u(t)$ è l'integrale generale dell'equazione

$$(39) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

omogenea associata della (38);

e $u_p : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione - particolare - della equazione non omogenea (38)

Questa affermazione si dimostra facilmente.

Anzitutto, con una verifica diretta, si riconosce che ogni funzione (46) è soluzione di (38).

Viceversa, se u è una soluzione di (38) allora $u - u_p$ è soluzione della omogenea associata (39) e quindi, essendo $c_1 u_1 + c_2 u_2$ l'integrale generale di quest'ultima, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$u - u_p = c_1 u_1 + c_2 u_2 ,$$

i.e., u si scrive come in (46).

6.c.- Per completare la teoria

riguardante le equazioni (38) restano da chiarire, e trattano, le seguenti questioni.

Q 1.- Ogni soluzione dell'equazione omogenea (39) si scrive necessariamente come affermato in E1, E2, E3?

Q 2.- Esiste un metodo generale per determinare almeno una soluzione u_p di (38)?

Q 3.- Il problema di Cauchy

$$(47)\qquad \begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

è univocamente risolubile

qualunque siano $t_0 \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

Osserviamo esplicitamente che questo problema è la formalizzazione matematica - relativa ai modelli differenziali riconducibili alla equazione (35) - del Principio di Newton secondo il quale lo stato di un sistema fisico in ogni istante t è univocamente determinato dalla legge differenziale che lo governa e dallo stato del sistema ad un fissato istante t_0.

Le risposte ai quesiti Q1, Q2 e Q3 verranno date nei successivi paragrafi 7, 8 e 9.

7. Coppie fondamentali di soluzioni

7.a. La nozione di coppia fondamentale ci permetterà di rispondere al quesito Q2 del precedente paragrafo.

Siano $u_1, u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzioni dell'equazione omogenea

(39) $$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Si pone

(48) $$W(u_1, u_2)(t) := \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}$$

Questo si chiama determinante Wronskiano della coppia (u_1, u_2).

Nel seguito, quando non vi sarà pericolo di ambiguità, scriveremo semplicemente $W(t)$ in luogo di $W(u_1, u_2)(t)$.

Con una verifica diretta, utilizzando il fatto che u_1 e u_2 sono entrambe soluzioni di (39), si riconosce facilmente che

$$W'(t) = -a_1 W(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In altri termini W è soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $y' = -a_1 y$. Quindi, per quanto visto nel § 3,

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-a_1(t-t_0)}$$

per ogni fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta quindi

$$W(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\text{esiste } t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0) \neq 0$$

Detto in altri termini:

$$W(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{esiste } t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0) = 0.$$

Si dice che la coppia di soluzioni (u_1, u_2) è una <u>coppia fondamentale</u> se esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$W(u_1, u_2)(t_0) \neq 0$$

Per quanto detto sopra questo equivale a dire che

$$W(u_1, u_2)(t) \neq 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

I seguenti esempi risulteranno fondamentali non soltanto per il quanto Q2 ma anche per Q1 e Q3

<u>Esempio A</u>.- Se il polinomio caratteristico di (39), i.e. il polinomio

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

ha due radici reali distinte λ_1 e λ_2 allora $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ è una coppia fondamentale di soluzioni di (39).

Sappiamo già che $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni di (39).

Risulta inoltre

$$W(u_1, u_2)(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) t}$$

e quindi, essendo $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$,

$$W(u_1, u_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

#

<u>Esempio B</u>. Se $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, il polinomio caratteristico di (39), ha una radice reale doppia λ, allora

$$(e^{\lambda t}, te^{\lambda t})$$

è una coppia fondamentale di soluzioni di (39).

Sappiamo già che $u_1(t) = e^{\lambda t}$ e $u_2(t) = te^{\lambda t}$ sono soluzioni di (39). Risulta poi

$$W(u_1, u_2)(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\lambda t}\Big((1+\lambda t) - \lambda t\Big) = e^{2\lambda t}$$

e quindi $W(u_1, u_2)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ #

<u>Esempio C</u> Se $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, il polinomio caratteristico di (39),

ha due radici complesse

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad e \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$, allora

$$(e^{\alpha t}\cos\beta t \,,\, e^{\alpha t}\sin\beta t)$$

è una coppia fondamentale di soluzioni di (39).

Sappiamo già che

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad e \quad u_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

sono soluzioni di (39). Risulta poi

$$W(u_1, u_2)(t) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$$

$$= e^{\alpha t}\cos\beta t\,(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t)$$

$$- e^{\alpha t}\sin\beta t\,(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t)$$

$$= e^{2\alpha t}\beta(\cos^2\beta t + \sin^2\beta t)$$

$$= \beta e^{2\alpha t}$$

e quindi $W(u_1, u_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. #

7.6.- Il metodo della variazione delle costanti

Questo metodo consente di determinare una soluzione particolare u_p della equazione non omogenea

(38) $$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

conoscendo una coppia fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata

(39) $$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 .$$

Si procede nel modo seguente. Sia (u_1, u_2) una coppia fondamentale di soluzioni della (39). Cerchiamo due funzioni $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$, deriva bili quanto basta, tali che

$$u_p(t) = c_1(t)\,u_1(t) + c_2(t)\,u_2(t)$$

sia soluzione di (38). A questo fine, deriviamo u_p, omettendo la variabile t per semplicità di notazione:

(49) $$u_p' = c_1' u_1 + c_2' u_2 + c_1 u_1' + c_2 u_2'.$$

Se poniamo

(50) $$c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0$$

dalla (49) ricaviamo

(51) $$u_p'' = c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_1 u_1'' + c_2 u_2''$$

Se poniamo

(52) $$c_1' u_1' + c_2' u_2' = b$$

dalla (51), ricordando che u_1 e u_2 sono soluzione della equazione omogenea (39), otteniamo

$$u_p'' = b + c_1(-a_1 u_1' - a_0 u_1) + c_2(-a_1 u_2' - a_0 u_2)$$

$$= b - a_1(c_1 u_1' + c_2 u_2') - a_0(c_1 u_1 + c_2 u_2)$$

$=$ (per (49) e (50))

$$b - a_1 u_p' - a_0 u_p .$$

In definitiva

$$u_p'' + a_1 u_p' + a_0 u_p = b ,$$

i.e., u_p è soluzione dell'equazione non omogenea (38).

Per quanto visto sopra quanto ~~precede~~ succede se il sistema di equazioni nelle variabili c_1' e c_2'

$$(53) \quad \begin{cases} c_1' u_1 + c_2' u_2 = 0 \\ c_1' u_1' + c_2' u_2' = b \end{cases}$$

è risolubile. Quanta risolubilità è garantita dal fatto che il determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = W(u_1, u_2)$$

è diverso da zero in ogni punto di I.

Infatti $W(u_1, u_2)$ è il determinante Wronskiano della coppia fondamentale (u_1, u_2).

Osserviamo esplicitamente che, da (53), si ricava

(54) $$c_1' = -\frac{b u_2}{W}, \quad c_2' = \frac{b u_1}{W}$$

ove abbiamo scritto W in luogo di $W(u_1, u_2)$. I secondi membri delle (54) sono funzioni continue su I ($b \in C(I)$)

Basta quindi prendere come funzioni c_1 e c_2 una primitiva, rispettivamente, di $-bu_2/W$ e di bu_1/W, per far sì che

$$u_p = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

sia soluzione di (38).

7.c Risposta al quesito Q 2. Integrale generale di (38).

Nel sottoparagrafo 7.a, Esempi A, B e C, abbiamo costruito coppie fondamentali di soluzioni di (39). Di conseguenza, col metodo della variazione delle costanti, siamo in grado di determinare una soluzione particolare di (38). Così, come mostrato nel sottoparagrafo 6.b, saremo in grado di determinare l'integrale generale di (38), quando avremo risposto affermativamente al quesito Q 1 di pagina 90. A questo scopo, nel seguente paragrafo, stabiliremo un principio di unicità

8. Principio di unicità

L'equazione differenziale

$$(38) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

verifica il seguente Principio di unicità:

> Se $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ sono soluzioni di (38)
>
> e se esiste $t_0 \in I$ tale che
>
> $$u_1(t_0) = u_2(t_0) \quad \text{e} \quad u_1'(t_0) = u_2'(t_0)$$
>
> allora $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in I$

Questo principio è conseguenza del lemma seguente.

Lemma 6: Sia $u : I \to \mathbb{R}$ una soluzione dell'equazione omogenea

$$(39) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Se esiste un punto $t_0 \in I$ tale che

$$u(t_0) = u'(t_0) = 0$$

allora $u(t) = 0$ per ogni $t \in I$

<u>Dimostrazione</u>. Poichè $u(t_0)=u'(t_0)=0$ risulta

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds \quad e \quad u'(t)=\int_{t_0}^{t} u''(s)\,ds$$

per ogni $t\in\mathbb{R}$. Dalla seconda, essendo u soluzione di (39), si trae

$$u'(t)=-\int_{t_0}^{t}\big(a_1 u'(s)+a_0 u(s)\big)\,ds$$

Di conseguenza, per ogni $t\geq t_0$, si ha:

$$|u(t)|+|u'(t)|\leq \int_{t_0}^{t}\Big((1+|a_1|)|u'(s)|+|a_0|\,|u(s)|\Big)ds$$

Da questa, posto

$$w(t)=|u(t)|+|u'(t)|$$

e

$$L=1+|a_1|+|a_0|,$$

si ricava

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds$$

Ora, poichè w è continua e nonnegativa, e poichè

$$w(t_0) = |u(t_0)| + |u'(t_0)| = 0,$$

possiamo applicare il Lemma 4 (pag 60) e concludere che

$$w(t) = 0 \text{ per ogni } t \geq t_0$$

Questo implica, ovviamente, $u(t) = 0$ per ogni $t \geq t_0$.

In modo analogo si dimostra che $u(t) = 0$ per ogni $t \leq t_0$.

In definitiva: $u(t) = 0$ per ogni $t \in I$. #

Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (38) tali che $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ e $u_1'(t_0) = u_2'(t_0)$ per un opportuno $t_0 \in I$, allora

$u = u_1 - u_2$ è soluzione dell'omogenea associata (3 9) e verifica le ipotesi del Lemma 6. Ne viene $u \equiv 0$ in I, e quindi $u_1 \equiv u_2$ in I.

Questo dimostra il Principio di unicità.