Una premessa

Memore del pensiero di Lucio Lombardo Radice:

uno scritto matematico non deve configurarsi soltanto come una esposizione di tecniche senza pensiero e senza storia,

alle note del corso sento di dover premettere le seguenti considerazioni di Einstein su Newton e Keplero.

Sono parole riprese da " Come io vedo il mondo", uno scritto nel quale Einstein sintetizza e riassume in modo chiaro, semplice e conciso le sue principali dottrine filosofico-scientifiche.

" Lo scopo perseguito da Newton e' stato quello di rispondere alla seguente domanda: esiste una regola semplice con la quale si puo' calcolare integralmente il movimento dei corpi celesti del nostro sistema planetario, se lo stato di movimento di tutti questi corpi in un dato momento e' conosciuto?
Ci si trovava in presenza delle leggi empiriche di Keplero sul movimento planetario. tratte dalle osservazioni di Tycho-Brahe', e che esigevano una spiegazione. Certo, queste leggi spiegavano pienamente il moto dei pianeti intorno al Sole (forma ellittica dell'orbita, uguaglianza delle aree descritte in tempi uguali, relazioni fra i grandi semiassi e la durata del percorso). Ma queste regole
non soddisfano alla condizione necessaria della causalita'[.......].

Il punto piu' importante e' questo: queste leggi si riferiscono al moto preso nel suo insieme e
non gia' alla maniera secondo la quale *lo stato del moto di un sistema in un dato momento deriva dallo stato del moto che lo ha immediatamente preceduto* : nel nostro linguaggio moderno diremmo che sono leggi integrali e non leggi differenziali.

La legge differenziale e' la sola forma che soddisfa pienamente la condizione necessaria di causalita'.
L'aver avuta la concezione netta della legge differenziale e' uno dei piu' grandi meriti del genio scientifico di Newton[....]. Per arrivare a questo, occorreva una matematica nuova (l'attuale calcolo differenziale). Si puo' qui tralasciare la questione se questa matematica nuova si deve a Leibnitz o a Newton: in ogni caso si puo' dire che per Newton questa nuova matematica era una necessita': essa sola poteva dare al suo pensiero un mezzo di espressione.

Fin qui Einstein. Alle sue parole noi potremmo aggiungere il seguente corollario: si deve a Newton l'idea della modelizzazione differenziale dei fenomeni naturali. La sua celeberrima formula $F = ma$ da sola basta a giustificare la nascita dell'intera teoria matematica delle equazioni differenziali.

Possiamo inoltre ricordare, poiche' della polemica Leibnitz - Newton Einstein ha lasciato trapelare qualcosa, pur ritenendo di poterla tralasciare, che il germe dell'idea che poi ha condotto alla nascita e allo sviluppo del calcolo differenziale fu gettato da Fermat, alcuni decenni prima dei fondamentali lavori di Leibnitz e di Newton. Gli spunti di Fermat erano di natura puramente matematica, soltanto *motivati* da problemi di massimo e di minimo dell'ottica geometrica.

Dalle primitive allo studio di modelli differenziali della Fisica della Biologia e della teoria cinematica delle curve

1.a "La "modellistica matematica" contemporanea è un campo della scienza che comprende buona parte delle appli=cazioni della Matematica allo studio dei fenomeni: un campo sterminato, com'è facile intuire"

[Giorgio Israel: Modelli Matematici, Editori Riuniti (1986)]

I più rilevanti modelli matematici delle scienze - pure ed applicate - sono governati da

<u>equazioni differenziali</u>.

Queste sono relazioni che legano fra loro i valori di una variabile indipendente x - molto spesso indicata con t - ed i valori di una funzione y e di certe sue derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

L' <u>incognita</u> è dunque una <u>funzione</u>, non un numero.

La <u>teoria della integrazione</u> fornisce lo strumento cruciale per lo studio della più semplice delle equazioni differenziali:

$$y' = f(x),$$

le cui soluzioni, com'è ben noto, sono chiamate <u>primitive</u> (o <u>antiderivate</u>) della funzione f.

La teoria della integrazione ha una portata che va ben oltre il problema della primitiva: essa procura gli strumenti e i metodi fondamentali per lo studio delle più generali equazioni differenziali.

Le presenti note verteranno su alcune equazioni della Fisica, della Biologia e della teoria cinematica delle curve, per le quali presenteremo metodi di integrazione (risoluzione) elementari e rigorosi.

Studieremo, precisamente:

1. Equazioni lineari del primo ordine.
2. Equazioni del primo ordine a variabili separabili.
3. Equazioni di Eulero, di Bernoulli, di Riccati, di Clairot.
4. Equazioni lineari del secondo ordine con coefficienti costanti.

1.b Alcuni modelli differenziali

- Legge del moto di un punto con velocità $V(t)$ al tempo t:

$$y' = V(t)$$

- Decadimento radioattivo:

$$y' = -k y \quad , k > 0.$$

- Modello di Malthus (dinamica delle popolazioni):

$$y' = ky \quad , \quad k > 0.$$

- Modello di Verhulst (dinamica delle popolazioni):

$$y' = ky - hy^2 \quad , \quad k, h > 0.$$

- Raffreddamento di un corpo:

$$y' = -k(a_0 - y) \quad , \quad k, a_0 > 0!$$

- Moto del pendolo:

(i) $$y'' = -\omega^2 \sin y \quad , \quad \omega > 0.$$

(ii) Piccole oscillazioni (moto armonico)

$$y'' = -\omega^2 y \quad , \quad \omega > 0$$

- Caduta dei gravi:

$$y'' = -g \quad , \quad g > 0$$

(caduta senza attrito)

$$y'' = -g + k y' \quad , k > 0$$

(caduta con attrito)

- Legge di Newton:

$$y'' = F(t, y, y')$$

- Brachistocrona:

$$y(1 + y'^2) = k$$

2. <u>La più semplice equazione differenziale:</u>

$$\underline{y' = f(t)}$$

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione continua. Si conviene, com'è naturale, chiamare <u>soluzione</u> dell'equazione differenziale

(1) $$y' = f(t)$$

una funzione

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derivabile in ogni punto e tale che

$$u'(t) = f(t) \quad \forall\, t \in I.$$

Di conseguenza, essendo f continua, u', la funzione derivata di f, deve essere continua; quindi $u \in C^{(1)}(I)$.

In altre parole: u è una primitiva continua - e quindi integrabile - di u'. Allora, dalla teoria della integrazione, otteniamo

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds \quad \forall\, t \in I.$$

onde, essendo u soluzione di (1),

$$(2) \qquad u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \quad \forall\, t \in I,$$

e per ogni fissato $t_0 \in I$.

Se poniamo $\alpha = u(t_0)$ si avrà così:

$$(4) \qquad u(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \qquad \forall t \in I$$

Pertanto: se u è soluzione di (1), per ogni fissato $t_0 \in I$ esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che u si scrive come in (4), e, precisamente, $\alpha = u(t_0)$.

Viceversa, se $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita in (4), con $t_0 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ fissati ad arbitrio, allora, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, u è derivabile in ogni punto di I con

$$u'(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Inoltre, ovviamente, $u(t_0) = \alpha$.

Abbiamo così riconosciuto che

<u>tutte e sole le soluzioni di (1) si scrivono come in (4), con $t_0 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ fissate ad arbitrio</u>;

<u>inoltre $u(t_0) = \alpha$</u>

<u>NOTA</u> Se u è soluzione di (1) e se $u(t_0) = \alpha$, si usa dire che u è soluzione del <u>problema di Cauchy</u>

$$(5) \qquad \begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Per quanto visto sopra, la funzione u in (4) è l'<u>unica soluzione</u> di (5). #

<u>Esempio</u> 1.- (Legge del moto di un punto che si muove su una retta con velocità costante)

Tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = v_0 \quad , \; v_0 = \text{costante reale},$$

sono date dalla formula

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;, \quad u(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} v_0 \, ds$$
$$= \alpha + v_0 (t - t_0)$$

e quindi

$$\longrightarrow \quad u(t) = v_0 t + c \quad , \; c = \alpha - v_0 t_0 .$$

#

<u>Esempio 2.</u>- (Legge del moto di un punto che si muove su una retta con velocità proporzionale al tempo)

Tutte le soluzioni (si usa anche dire l'<u>integrale generale</u>) della equazione differenziale

$$y' = k t \quad , \; k \in \mathbb{R},$$

sono date dalla seguente formula

$$u(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} k s \, ds = \alpha + \tfrac{1}{2} k (t^2 - t_0^2)$$

la quale, ponendo $c = \alpha - \frac{1}{2} k t_0^2$,

può essere scritta così:

$$\longrightarrow \quad u(t) = \tfrac{1}{2} k t^2 + c \quad , \; c \in \mathbb{R}. \quad \#$$

3. La più semplice equazione differenziale del secondo ordine: $y'' = f(t)$.

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Una soluzione della equazione differenziale del secondo ordine

(6) $$y'' = f(t)$$

è una funzione $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabile due volte in ogni punto e tale che

$$u''(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Essendo f continua, per ipotesi, risulta quindi u'' continua, i.e., $u \in C^{(2)}(I)$.

Per ogni punto $t_0 \in I$ risulta, come già detto nel §2,

$$(7) \qquad u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds \quad \forall t \in I.$$

Integriamo ora per parti l'integrale al secondo membro, prendendo come primitiva della funzione costante 1, la funzione

$$s \longmapsto s - t$$

(qui la t va intesa costante rispetto alla variabile di integrazione s)

Otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds =$$

$$\Big[(s-t)\,u'(s)\Big]_{s=t_0}^{s=t} - \int_{t_0}^{t} (s-t)\,u''(s)\,ds$$

$$= (t-t_0)\,u'(t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-s)\,u''(s)\,ds$$

sostituendo questa nella (7) otteniamo

(8) $$u(t) = u(t_0) + u'(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-s)\,u''(s)\,ds$$

Quindi, se u è soluzione di (6),

(8) $$u(t) = u(t_0) + u'(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-s)\,f(s)\,ds$$

per ogni $t_0,\ t \in I$.

Quindi, ponendo

$\alpha = u(t_0)$ e $\beta = u'(t_0)$,

$$(8) \qquad u(t) = \alpha + \beta(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} (t-s) f(s)\, ds$$

<u>Viceversa</u>: siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$ fissati ad arbitrio, e sia $u : I \to \mathbb{R}$ definita come in (8). Dimostriamo che u risolve (6) e $\alpha = u(t_0)$ e $\beta = u'(t_0)$.

Scriviamo anzitutto la (8) come segue

$$u(t) = (\alpha - \beta t_0) + \beta t + t \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} s f(s)\, ds$$

Allora, grazie al Teorema fondamentale del calcolo integrale, u è derivabile in ogni punto con

$$(9) \qquad u'(t) = \beta + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds + t f(t) - t f(t)$$

$$= \beta + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Da questo, ancora per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$u''(t) = f(t) \quad \forall t \in I$$

Questo dimostra che u è soluzione dell'equazione (6). Risulta poi, dalle (8), $u(t_0) = \alpha$ e, dalla (9), $u'(t_0) = \beta$.

Abbiamo così dimostrato che:

<u>tutte e sole le soluzioni della equazione differenziale (6) sono date dalle (8), con $t_0 \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fissate ad arbitrio.</u>

<u>NOTA</u>. Se u è soluzione di (6), e se $u(t_0) = \alpha$ e $u'(t_0) = \beta$, si usa dire che u è soluzione del <u>problema di Cauchy</u>

$$(10) \qquad \begin{cases} y'' = f(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Per quanto visto sopra, la funzione u in (8) è l'unica soluzione di (10). #

Esempio 3.- (Moto di caduta dei gravi)

Tutte le soluzioni (si usa anche dire l'integrale generale) della equazione

$$y'' = -g \quad , \; g = \text{costante}$$

sono date dalla seguente formula

$$(11) \quad u(t) = \alpha + \beta(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} (t-s) g \, ds$$

Queste, poichè

$$\int_{t_0}^{t} (t-s) g \, ds = \left[-\tfrac{1}{2} (t-s)^2 g \right]_{s=t_0}^{s=t}$$

$$= \tfrac{1}{2} (t-t_0)^2 g \, ,$$

ponendo $c_1 = \alpha - \beta t_0 - \frac{1}{4} t_0^2 g$ e $c_2 = \beta + g t_0$

può scriversi anche così:

(12) $$u(t) = c_1 + c_2 t - \frac{1}{2} g t^2$$

con c_1 e c_2 arbitrarie costanti reali.

3.- Equazioni differenziali lineari del primo ordine

3.a.- Premessa. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue.

Una relazione del tipo seguente

(12) $$y' = a(t)y + b(t)$$

si chiama equazione differenziale lineare del primo ordine.

Nel caso $b \equiv 0$ la (12) diventa

(13) $$y' = a(t)y.$$

Questa si chiama equazione omogenea associata della (12)

Una soluzione della (12) è, per definizione, una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ derivabile ~~in tutto~~ in ogni punto e tale che

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \quad \forall t \in I.$$

Data la continuità delle funzioni a e b, la funzione u' risulta quindi continua. Dunque: ogni soluzione della (12) è di classe $C^{(1)}$!

NOTA (Cruciale) L'equazione (13), omogenea associata della (12), è lineare rispetto a y ed y'. Questo ha la seguente importante proprietà: se u_1 e u_2 sono soluzioni di (13) e se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

è soluzione di (13). La verifica di

questa affermazione è immediata.

3.b.- Integrazione (risoluzione) della equazione $y' = a(t)y$.

L'idea cruciale, per risolvere

(13) $$y' = a(t)y,$$

equazione omogenea associata della (12), è la seguente. Sia $A : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Allora $t \mapsto e^{A(t)}$ è derivabile in ogni punto con

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right) = A'(t)\,e^{A(t)}.$$

Pertanto, se $A'(t) = a(t)$ i.e., se A è una primitiva di a, allora

$$\left(e^{A(t)}\right)' = a(t)\,e^{A(t)}$$

e dunque $t \mapsto e^{A(t)}$ è soluzione della (13). Di conseguenza, per la linearità di questa equazione,

(14) $$u(t) = c_1 e^{A(t)}, \quad t \in I,$$

è soluzione di (13) per ogni costante $c_1 \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che ogni soluzione di (13) è data dalla (14). A questo scopo, evidentemente, basta dimostrare che, se v è soluzione di (13), allora $e^{-A(t)} v(t) \equiv$ costante in I, od anche, equivalentemente, che $(e^{-A(t)} v(t))' = 0$ per ogni $t \in I$.

Ora

$$(e^{-A(t)} v(t))' =$$

$$-A'(t) e^{-A(t)} v(t) + e^{-A(t)} v'(t)$$

$=$ (A è una primitiva di a)

$$-a(t)\,e^{-A(t)}\,v(t) + e^{-A(t)}\,v'(t)$$
$$= e^{-A(t)}\left(-a(t)v(t) + v'(t)\right)$$
$$= 0 \quad (v \text{ è soluzione di } (13))$$

Abbiamo così dimostrato che tutte e sole le soluzioni della equazione $y' = a(t)y$ sono date dalla formula (14) con A primitiva di a e $c_1 \in \mathbb{R}$.

Essendo le primitive di a date dalla formula

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + c_0\,,$$

la (14) si può scrivere così:

$$u(t) = c_1\, e^{\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + c_0\right)}$$
$$= c_1\, e^{c_0}\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

e quindi anche così:

$$(15) \qquad u(t) = c\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\,, \quad t \in I$$

con $t_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}$ fissati ad arbitrio

Si usa dire che (15) è l'integrale generale di $y' = a(t)y$

3. c.- Ricerca di una soluzione della equazione non omogenea $y' = a(t)y + b(t)$. Il metodo della variazione delle costanti.

Il metodo del titolo consiste nel cercare una soluzione dell'equazione

(12) $$y' = a(t)y + b(t)$$

del tipo seguente

(16) $$u_0(t) = c(t)\, e^{A(t)}$$

ove, come nel precedente sottoparagrafo, $t \mapsto A(t)$ è una primitiva di a

NOTA Se la funzione $t \mapsto c(t)$ fosse costante allora u_0 sarebbe soluzione dell'equazione omogenea $y' = a(t)y$.

Euristicamente, scegliendo $t \mapsto c(t)$ "opportunamente variabile", si può far sì che u_0 risulti soluzione di $y' = a(t)y + b(t)$. #

Assumiamo che la funzione $t \mapsto c(t)$ nella (16) sia di classe $C^{(1)}$. Affinché u_0 sia soluzione della (12) è necessario e sufficiente che sia

$$u_0'(t) = a(t)u_0(t) + b(t)$$

e quindi, essendo

$$u_0'(t) = c'(t)\, e^{A(t)} + c(t)\,a(t)\, e^{A(t)},$$

$(A' = a\,!)$,

$$c'(t)\, e^{A(t)} + \cancel{c(t)\,a(t)\, e^{A(t)}} = \cancel{a(t)\,c(t)\, e^{A(t)}} + b(t)$$

Questa identità è equivalente alla seguente:

$$c'(t)\, e^{A(t)} = b(t)$$

od anche

$$c'(t) = b(t)\, e^{-A(t)}.$$

<u>Conclusione</u>: la funzione u_0 in (16) è soluzione di $y' = a(t)y + b(t)$ se e solo se la funzione $t \mapsto c(t)$ è una <u>primitiva</u> di $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$

Quindi, tutte le funzioni del tipo

$$(17)\quad u_0(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds\right) e^{A(t)}, \quad t \in I$$

con $t_0 \in I$ fissato ad arbitrio, sono soluzioni della (12).

3.d- <u>Integrale generale di $y' = a(t)y + b(t)$</u>

Tutte e sole le soluzioni u dell'equazione

$$y' = a(t)y + b(t)$$

si scrivono nella forma seguente

(18) $$u(t) = c\, e^{A(t)} + u_0(t)$$

dove c è una qualunque costante reale, $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e $u_0(t)$ è una soluzione (particolare, ed arbitraria) della equazione $y' = a(t)\, y + b(t)$. Come $u_0(t)$ si può scegliere la funzione definita in (17).

Diremo che la formula (18) fornisce l'integrale generale dell'equazione

(12) $$y' = a(t)\, y + b(t)$$

Dimostriamo quanto affermato qui sopra.

Se u è una funzione come in (18) allora $u \in C^{(1)}(I)$ e

$$u' = c\,a\,e^{A} + u_0' = c\,a\,e^{A} + (a u_0 + b)$$
$$= a(c\,e^{A} + u_0) + b = a u + b$$

Quindi u è soluzione di (12).

Viceversa, sia u una qualunque soluzione di (12). Se u_0 è una particolare, fissata, soluzione di (12) allora

$$(u-u_0)' = (au+b) - (au_0+b)$$
$$= a(u-u_0)$$

i.e., $u-u_0$ è soluzione di $y' = ay$, omogenea associata alla (12).

Esistono quindi una costante $c \in \mathbb{R}$ e una primitiva A di a tali che

$$u-u_0 = c\,e^A$$

Quindi $u = c\,e^A + u_0$, i.e., una funzione come in (18). #

3.e.- Problema di Cauchy per $y'=a(t)y+b(t)$

Sia $t_0 \in I$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Con la notazione

$$(19) \quad \begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

indichiamo il problema consistente nel trovare una soluzione u della equazione $y'=a(t)y+b(t)$ tale che $u(t_0)=\alpha$. Questo viene chiamato problema di Cauchy relativo a $y'=a(t)y+b(t)$ con condizione iniziale $y(t_0)=\alpha$.

Dimostriamo che (19) ha una unica soluzione data dalla funzione

(20) $u : I \to \mathbb{R}$,

$$u(t) = e^{A(t)}\left(\alpha + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds\right)$$

con

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds .$$

Ora, per quanto dimostrato nel precedente sottoparagrafo 3.d, u è soluzione dell'equazione $y' = a(t)y + b(t)$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t) = e^{A(t)}\left(c + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{-A(s)}\, ds\right)$$

(cfr. (18) e (17)). Questa funzione, d'altra parte, verifica la condizione iniziale $u(t_0) = \alpha$ se e solo se $c = \alpha$. #

3.8. - Un esempio. Risoluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + t^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Con le nostre notazioni, abbiamo

$$a(t) = 1 \quad e \quad b(t) = t^2$$

Allora

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds = \int_0^t ds = t$$

e quindi

$$y = ce^t \ , \ c \in \mathbb{R}$$

è l'integrale generale della equazione omogenea associata $y' = y$.

Cerchiamo ora una soluzione della equazione non omogenea col metodo della variazione delle costanti.

Sappiamo che $u_0(t) = C(t)\,e^t$ è

una tale soluzione se

$$c'(t) = b(t)e^{-t}$$
$$= t^2 e^{-t}.$$

Prendiamo $c(t) = \int_0^t s^2 e^{-s}\,ds$.

Allora, integrando per parti, abbiamo

$$c(t) = \left[-e^{-s}s^2\right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t 2s\,e^{-s}\,ds$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2\left(\left[-e^{-s}s\right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t e^{-s}\,ds\right)$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2\left(-t e^{-t} + \left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=t}\right)$$

$$= e^{-t}\left(-t^2 - 2t - 2\right) + 2.$$

Otteniamo così

$$u_0(t) = -(t^2+2t+2) + 2e^t$$

come soluzione particolare della equazione $y' = y + t^2$. Ne viene che l'integrale generale di questa equazione si può scrivere nel modo seguente

$$y = c e^t - (t^2 + 2t + 2) + 2 e^t$$

od anche, accorpando 2 nella costante c,

$$y = c e^t - (t^2 + 2t + 2)$$

Questa funzione soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$ se e solo se

$$1 = c - 2 \iff c = 3$$

L'unica soluzione del dato problema di Cauchy è quindi la funzione

$$u(t) = 3 e^t - t^2 - t - 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

#

<u>NOTA</u> Si può trovare una soluzione particolare di ogni equazione differenziale del tipo seguente

(20) $\quad y' = a y + p(t),$

ove a è una costante reale e $t \mapsto p(t)$