(i) Legge differenziale della caduta dei gravi in presenza di attrito

$$y'' = -g - ky'$$

ove g = accelerazione di gravità e $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

(ii) Legge differenziale di un moto armonico

$$(*) \qquad y'' = -\omega^2 y$$

(iii) Legge differenziale del moto di un pendolo. Piccole oscillazioni

$F = mg \operatorname{sen}\alpha$

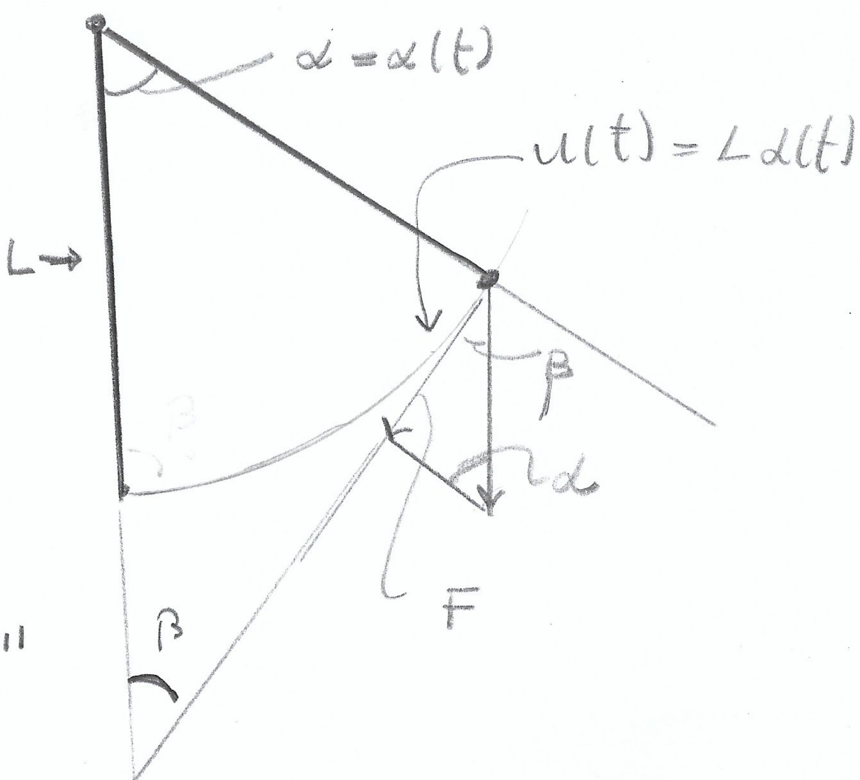
$\downarrow$

$mg \operatorname{sen}\alpha =$

$= -mu''$

$\Downarrow$

$mg \operatorname{sen}\alpha = -mL\alpha''$



con le notazioni in figura, risulta

$g \operatorname{sen}\alpha = -L\alpha''$ e quindi

$$\alpha'' = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\alpha$$

Questa, posto $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, si scrive

$$\alpha'' + \omega^2 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Questa è una equazione differenziale del secondo ordine non lineare.

Per piccole oscillazioni, cioè per α "vicino" a zero, $\operatorname{sen}\alpha$ differisce da α per un "infinitesimo" del terzo ordine - rispetto ad α - L'equazione

<u>lineare</u>

$$(\bullet\bullet) \qquad \alpha'' + \omega^2\alpha = 0$$

ha quindi (!) soluzioni che differiscono "di poco" da quelle di $(\bullet)$. Le piccole oscillazioni del pendolo sono quindi governate da una legge differenziale uguale a quella del moto armonico (cfr (*)).

→ a pagina 77 ←

 ← SOSTITUISCE LA PRECEDENTE

7.c Risposta al quesito Q2

Nel sottoparagrafo 7.a abbiamo dimostrato che ogni equazione omogenea

(39) $$y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

possiede - almeno - una coppia fondamentale di soluzioni. Di conseguenza, col metodo della variazione delle costanti del sottoparagrafo 7.b siamo sempre in grado di costruire una soluzione particolare della equazione non omogenea

(38) $$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

Questo risponde al quesito Q2 di pagina 90.

Per rispondere ai restanti due quesiti ci serviremo anche del principio di unicità del seguente paragrafo.

$u = u_1 - u_2$ è soluzione dell'omogenea associata (39) e verifica le ipotesi del Lemma 6. Ne viene $u \equiv 0$ in I, e quindi $u_1 \equiv u_2$ in I.

Questo dimostra il Principio di unicità.

9.- Univoca risolubilità del problema di Cauchy per l'equazione (38)

Sia (u_1, u_2) una coppia fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea

(39) $$y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

Ricordiamo che una tale coppia esiste grazie ai risultati del sottoparagrafo 7.a.

Sia poi u_p una soluzione

particolare dell'equazione non omogenea

(38) $$y''+a_1 y'+a_0 y = b(t)$$

Una tale soluzione, ricordiamo ancora, siamo in grado di determinarla col metodo della variazione delle costanti del sottoparagrafo 7.6

Di conseguenza, per la linearità di (38), qualunque siano le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la funzione

(49) $$u := c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_p$$

è soluzione di (38).

Fissiamo ora $t_0 \in I$ ad arbitrio e consideriamo il problema di Cauchy

(50) $$\begin{cases} y''+a_1 y'+a_0 y = b(t) \\ y(t_0)=\alpha \\ y'(t_0)=\beta \end{cases}$$

Dimostriamo che esso ha soluzione, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A questo scopo, poichè la funzione (49) è soluzione di (38) qualunque siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, è sufficente mostrare che si possono scegliere c_1 e c_2 in modo tale che

$$\begin{cases} c_1 u_1(t_0) + c_2 u_2(t_0) + u_p(t_0) = \alpha \\ c_1 u_1'(t_0) + c_2 u_2'(t_0) + u_p'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Questo sistema nelle incognite c_1 e c_2 è equivalente al seguente

$$\begin{cases} c_1 u_1(t_0) + c_2 u_2(t_0) = \alpha - u_p(t_0) \\ c_1 u_1'(t_0) + c_2 u_2'(t_0) = \beta - u_p'(t_0) \end{cases},$$

che risulta risolubile in quanto il determinante dei suoi coefficienti

$$\begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

è il Wronskiano di (u_1, u_2) calcolato nel punto t_0, il quale risulta diverso da zero essendo (u_1, u_2) una coppia fondamentale.

Questo dimostra che (50) ha soluzione.

Dimostriamo che questa è unica.

Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (50) allora

$$u := u_1 - u_2$$

è soluzione dell'equazione omogenea (39) e verifica le condizioni

$$u(t_0) = 0 \quad e \quad u'(t_0) = 0.$$

Di conseguenza, per il Principio di unicità $u \equiv 0$, i.e.

$$u_1 \equiv u_2.$$

Con questo abbiamo risposto affermativamente al quesito (Q3) di pagina (90).

10. Integrale generale dell'equazione (38). Risposta al quesito (Q1)

Sia (u_1, u_2) una coppia fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea

$$(39) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

e sia u_p una soluzione particolare della non omogenea

$$(38) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

Allora

$$(51) \qquad u := c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_p$$

è soluzione di (38), qualunque siano le costanti reali c_1 e c_2.

Dimostriamo che <u>ogni</u> soluzione di (38) si scrive come in (51). Questo proverà che (51) è l'integrale generale di (38) e risponderà affermativamente a (Q1), l'ultimo quesito rimasto.

Sia dunque v una qualunque soluzione di (38). Fissato ad arbitrio $t_0 \in I$ poniamo

$$\alpha = v(t_0) \quad e \quad \beta = v'(t_0).$$

Per quanto dimostrato nel precedente paragrafo, esistono due costanti reali c_1 e c_2 tali che è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Ma, ovviamente, anche v è soluzione di questo problema. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy deve quindi essere $v = u^*$, i.e.,

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_p$$

Questo dimostra che (51) è l'integrale generale dell'equazione (38). In particolare, se $b \equiv 0$, i.e., se (38) si riduce alla (39), potendo scegliere $u_p \equiv 0$, si ottiene che

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} ,$$

è l'integrale generale della equazione omogenea

$$(39) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 .$$

$\#$