3.8'. Raffreddamento di un corpo.

Principio di Newton. Il tasso di variazione della temperatura di un corpo è direttamente proporzionale alla differenza fra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente.

Sulla base di questo principio la legge differenziale del raffreddamento di un corpo si esprime nel modo seguente

$$(\circ) \qquad y' = -k\,(y - a_0)$$

dove y indica la temperatura, a_0 è la temperatura dell'ambiente e $k\,(>0)$ è la costante di raffreddamento.

Si trova facilmente che $u(t) = c\,e^{-kt} + a_0$, $c \in \mathbb{R}$, è l'integrale generale di $(\circ)$

Il problema di valori iniziali (problema di Cauchy) per il raffreddamento di un corpo:

$$\begin{cases} y' = -k(y - a_0) \\ y(t_0) = T_0 \end{cases}$$

con $T_0 > a_0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, ha come unica soluzione la funzione

$$T(t) = (T_0 - a_0)\, e^{-k(t-t_0)} + a_0 \,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

#

è un polinomio con coefficienti reali di grado n, utilizzando la seguente proposizione, la cui dimostrazione segue da una verifica diretta.

Proposizione 1 Esiste un polinomio con coefficienti reali $t \longmapsto q(t)$ di grado n, soluzione della equazione differenziale (20).

$\boxed{\text{Alle pagine } 32' \text{ e } 32''}$

4. Dinamica delle popolazioni: l'equazione di Verhulst.

Consideriamo una popolazione costituita da p individui; p è un numero naturale e pertanto la funzione $t \longmapsto p(t)$ varia con discontinuità. Tuttavia se p è piuttosto grande si commette un errore trascurabile ritenendo che p sia una funzione continua di t. La variazione $\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t)$ subita da p nell'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$, $\Delta t > 0$, è somma di due addendi distinti. Il primo è relativo alle nascite, il cui numero si può ritenere approssimativamente fornito da

$$(\Delta p)_1 = n(t)\, p(t)\, \Delta t$$

dove $n(t)$ è il tasso di natalità al tempo t. Il secondo è relativo alle morti: per esso abbiamo la formula approssimata

$$(\Delta p)_2 = -m(t)\, p(t)\, \Delta(t)$$

dove $m(t)$ è il tasso di mortalità al tempo t. [.....]

Se la popolazione è isolata, le variazioni dovute a immigrazioni ed emigrazioni si può trascurare. Ne risulta

$$\Delta p = (\Delta p)_1 + (\Delta p)_2 = (n - m)\, p\, \Delta t$$

A causa della competizione tra gli individui, si ammette in generale che il tasso di natalità n decresca con p, mentre il tasso di mortalità aumenti con p. In prima approssimazione si può ritenere che n ed m siano funzioni affini di p:

$$n = n_0 - n_1 p\ , \quad m = m_0 + m_1 p$$

(con n_0, n_1, m_0, m_1 positivi); dunque

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = (n_0 - m_0)p - (n_1 + m_1)p^2,$$

cioè, ponendo $\lambda \overset{def}{=} n_0 - m_0$, $h = n_1 + m_1$,

(21) $$p'(t) = \lambda p(t) - h\,(p(t))^2$$

si suppone che λ e h siano costanti positive. L'equazione (21) fu proposta dal belga P.F. Verhulst nel 1845. Ci interessano, evidentemente, le soluzioni per cui $p(t) > 0$.

Vediamo innanzitutto se esistono soluzioni costanti $p(t) =$ costante.

Da $p'(t) = 0$ segue

$$0 = \lambda p - h p^2 = (\lambda - hp)p \Rightarrow p = \frac{\lambda}{h}$$

avendo scartato la soluzione identicamente nulla. Dunque $p(t) = \frac{\lambda}{h}$ è l'unica soluzione costante (positiva) dell'equazione di Verhulst: ciò significa che, se per $t=0$ la popolazione ha dimensione λ/h, essa si mantiene in equilibrio a tale dimensione[(1)].

Vedremo che tale equilibrio è stabile, cioè: se $p(0)$ è maggiore o minore di λ/h allora $p(t)$ tende a portarsi a tale valore di equilibrio per $t \longrightarrow +\infty$.

- Brano tratto dal volume "Istituzioni di Matematica" di G.C. Barozzi, Coop. Lib. Univ. Bologna (1972). (pagine 557-558)

---

(1) Qui si sta usando la seguente proprietà: le soluzioni di (21) sono univocamente determinate dal loro valore al tempo $t=0$.

• L'equazione differenziale

$$(21)' \qquad y' = \lambda y - h y^2 \quad , \quad \lambda, h > 0 ,$$

(cfr. (21)) viene <u>chiamata equazione logistica</u>. Vedremo che le sue soluzioni sono funzioni del tipo seguente

$$p(t) = a \, \frac{b + m e^{\alpha t}}{c + n e^{\alpha t}}$$

con $a, b, c, m, n, \alpha \in \mathbb{R}$

Queste si chiamano <u>funzioni logistiche</u>:

esse trovano applicazioni in economia, oltre che ~~in~~ biologia

• L'equazione differenziale (21)' rientra nella classe delle equazioni differenziali del primo ordine a <u>variabili separabili</u> per le quali, come vedremo nel seguente paragrafo, esisteva un metodo di integrazione elementare, anch'esso fondato sulla nozione di primitiva.

5. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Si chiama equazione differenziale del primo ordine a <u>variabili separabili</u> ogni equazione della forma

(22) $$y' = a(t)b(y)$$

ove $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : Y \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, ed I e Y sono intervalli di $\mathbb{R}$.

Chiamiamo soluzione di (22) ogni funzione $u : J \to \mathbb{R}$, con

J intervallo contenuto in I, tale che

(i) $u(t) \in Y$ per ogni $t \in J$;

(ii) u è di classe C^1 e verifica

$$u'(t) = a(t)\, b(u(t)) \quad \forall t \in J.$$

Prima di mostrare come si integrano le equazioni (22) sono opportuni alcuni commenti.

<u>Commento 1</u>. Consentire alle soluzioni di (22) di essere definite anche soltanto su di un sottointervallo J di I — dominio della funzione a al secondo membro di (22) — permette di tener conto del fenomeno, possibile, della "esplosione in tempi finiti"

delle soluzioni di (22). E' questo un modo per dire che possono esservi soluzioni dell'equazione (22) aventi come dominio naturale un intervallo J strettamente contenuto nel dominio I della funzione a, soluzioni che divergono a $+\infty$ oppure a $-\infty$ quando la variabile $t \in J$ tende agli estremi di J.

Illustriamo questo fenomeno col seguente esempio.

<u>Esempio 4.</u> Consideriamo la equazione differenziale

$$(23) \qquad y' = 1 + y^2$$

Questa rientra nella classe delle (22), con $a(t) \equiv 1$, $b(y) = 1+y^2$, e $I = Y = \mathbb{R}$.

Ora, sia $u : J \to \mathbb{R}$, con J intervallo di $\mathbb{R}$, una soluzione di (23). Allora

$$\frac{u'(t)}{1+u^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J.$$

Per ogni $t_0, t \in J$ risulta pertanto

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{1+u^2(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} ds .$$

Da questa identità, essendo

$$\frac{u'(s)}{1+u^2(t)} = \left(\operatorname{arctg} u(t)\right)',$$

si trae

$$\text{(23)} \qquad \Big[\operatorname{arctg} u(s)\Big]_{s=t_0}^{s=t} = t - t_0$$

e quindi

(24) $$\operatorname{arctg} u(t) - \operatorname{arctg} u(t_0) = t - t_0 .$$

Ne viene, in particolare

$$|t-t_0| \leq |\operatorname{arctg} u(t)| + |\operatorname{arctg} u(t_0)| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Poichè questo vale per ogni $t_0, t \in J$, possiamo concludere che la lunghezza dell'intervallo J non supera π.

Quindi $J \subsetneq \mathbb{R}$ e u non può essere prolungata, in modo da risultare soluzione di (22), su tutto $\mathbb{R}$. Dalla (24) si trae

$$-\frac{\pi}{2} < t - \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \iff t \in J$$

con $\alpha_0 := t_0 - \operatorname{arctg} u(t_0)$,

se J è l'intervallo "massimale" di definizione di u.

Ancora dalla (24) si deduce poi

$$\longrightarrow u(t) = tg(t-\alpha_0) \quad , \; t \in J$$

con $J =]\alpha_0 - \frac{\pi}{2}, \alpha_0 + \frac{\pi}{2}[$, onde:

$$\lim_{J \ni t \to \alpha_0 - \frac{\pi}{2}} u(t) = -\infty$$

e

$$\lim_{J \ni t \to \alpha_0 + \frac{\pi}{2}} u(t) = +\infty$$

#

Commento 2. Nel precedente paragrafo abbiamo osservato che la funzione costante

$$u_0 \equiv \frac{\lambda}{h}$$

è soluzione della equazione di Verhulst

$$y' = \lambda y - h y^2$$

Abbiamo aggiunto che, allora, se

se una soluzione u della stessa equazione assume il valore $\frac{\lambda}{h}$ al tempo $t=0$, essa si mantiene costante per tutti i tempi, i.e.,

$u \equiv u_0$.

Questa ultima affermazione è vera perché l'equazione di Verhulst verifica il seguente principio (come mostreremo più avanti):

> se u e v sono due soluzioni dell'equazione tali che
> $$u(t_0) = v(t_0)$$
> per qualche t_0, allora $u \equiv v$.

In altri termini: se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \lambda y - h y^2 \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

ha soluzione allora <u>questa è unica</u>.

Questo principio di unicità non vale per qualunque equazione, come dimostra il seguente esempio.

<u>Esempio 5</u>. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(25) \qquad \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione in (24) è a variabili separabili, con $a(t) \equiv 1$, $b(y) = \sqrt{|y|}$, e con $I = Y = \mathbb{R}$.

La funzione costante uguale a zero

$$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_0(t) = 0$$

e', evidentemente, soluzione di (25), ma non ne e' l'unica. Infatti come si verifica facilmente, anche la funzione

$$u_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u_1(t) = \frac{1}{4} t^2 \operatorname{sgn}(t)\ ^{(1)}$$

risolve (24)

Si noti infatti che $u_1(0) = 0$, e che u_1 è derivabile in ogni punto con derivata

$$u_1'(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sgn}(t) = \frac{1}{2}|t|.$$

Quindi $t \mapsto u_1'(t)$ è continua e

$$u_1'(t) = \frac{1}{2}|t| = \sqrt{\frac{1}{4}t^2} =$$

---

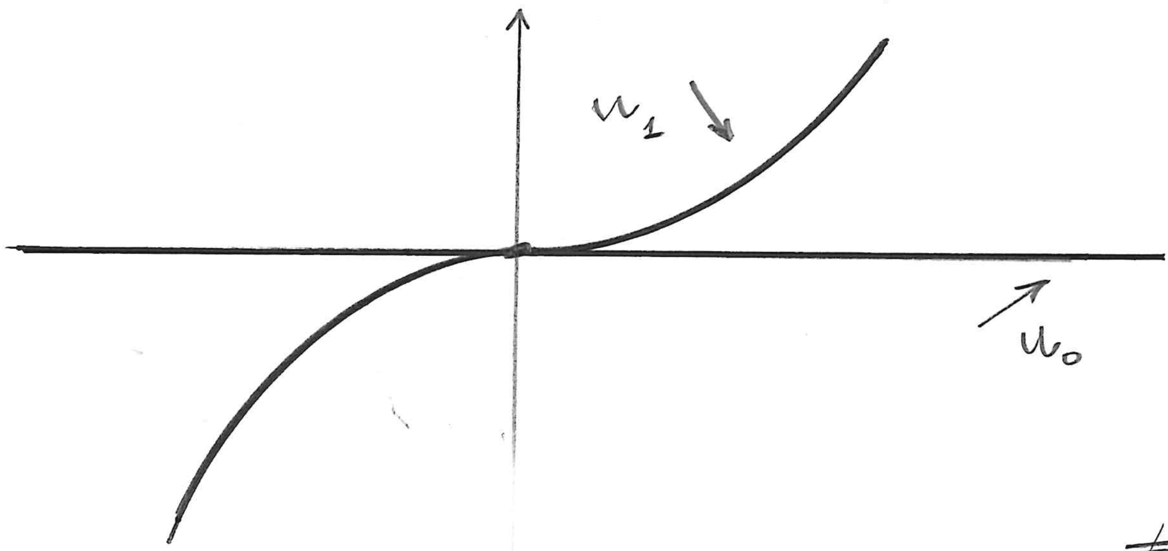
(1)

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \left| t^2 \operatorname{sgn}(t) \right|}$$

onde $u_1'(t) = \sqrt{|u_1(t)|}$, i.e.,

u_1 è soluzione di $y' = \sqrt{|y|}$.



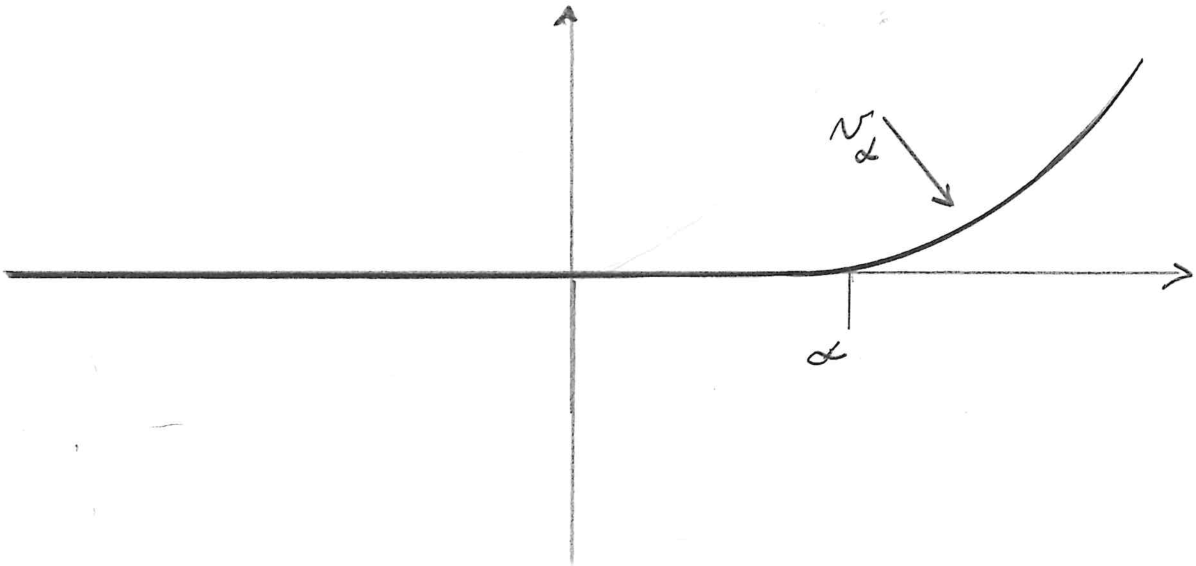
#

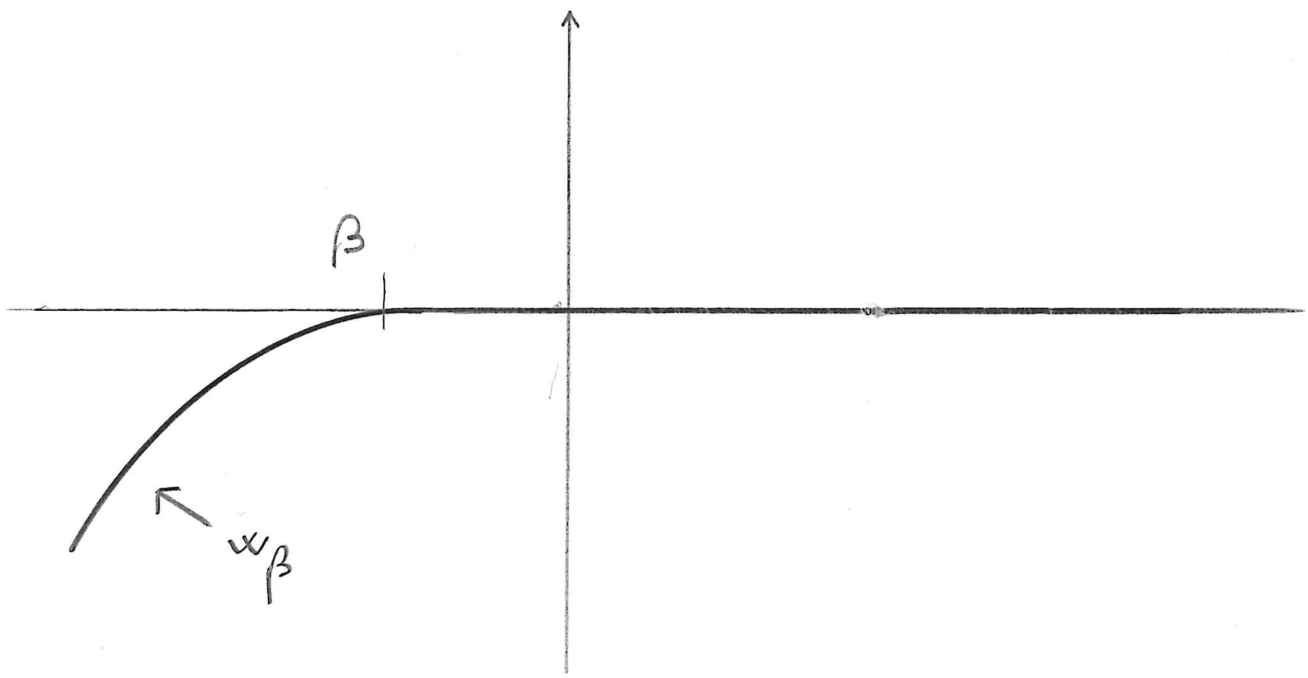
<u>Nota</u> Dalle funzioni u_0 e u_1 si possono trarre <u>infinite</u> soluzioni distinte del problema di Cauchy (25)

Infatti, per esempio, per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $\beta < 0$ sono soluzioni di (25) le seguenti funzioni w_α e w_β:

$$v_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < \alpha \\ u_1(t-\alpha), & \text{se } t \geq \alpha \end{cases},$$

$$w_\beta(t) = \begin{cases} u_1(t-\beta), & \text{se } t < \beta \\ 0, & \text{se } t \geq \beta \end{cases}$$





• Nella parte restante di questo paragrafo mostreremo come si possono trovare soluzioni della equazione

(22) $$y' = a(t)\, b(y).$$

Ricordiamo che I e Y indicano, rispettivamente, gli intervalli di definizione delle funzioni a e b e che queste sono supposte essere - almeno - continue.

E' conveniente, e formalmente preferibile, anziché cercare generiche soluzioni di (22), cercare quelle che verificano assegnate condizioni iniziali. Questo, in altri termini, significa cercare di risolvere il problema di Cauchy

$$(26) \quad \begin{cases} y' = a(t)\, b(y) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \text{con } t_0 \in I \text{ e } \alpha \in Y$$

• Studiamo questo problema supponendo dapprima che la funzione b non abbia zeri, i.e.,

$$b(y) \neq 0 \quad \forall y \in Y.$$

Poiché Y è un intervallo e b è continua, sarà quindi $b(y) > 0$ per ogni $y \in Y$ oppure $b(y) < 0$ per ogni $y \in Y$. Eventualmente cambiando il segno della funzione a, possiamo supporre, come sempre faremo,

$$(27) \qquad b(y) > 0 \quad \forall y \in Y.$$

Vale allora la seguente proposizione

<u>Proposizione 2.</u>: Sia J un intervallo

contenuto in I e contenente t_0. Una funzione

$$u : J \longrightarrow Y$$

è soluzione del problema di Cauchy (26)

se e solo se verifica l'equazione

$$(28) \qquad \int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{b(y)}\, dy = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \quad \forall t \in J.$$

Dimostrazione Se $u : J \to \mathbb{R}$ è soluzione di (26) allora $u(t_0) = \alpha$, $b(u(s))$ è ben definita per ogni $s \in J$, u è derivabile e

$$\frac{u'(s)}{b(u(s))} = a(s) \quad \forall s \in J.$$

Ne viene

$$(29) \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{b(u(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

per ogni $t \in J$.

Nell'integrale al primo membro eseguiamo il cambiamento di variabile

$$y = u(s).$$

Questo implica

$y = u(t_0) = \alpha$ se $s = t_0$ e $y = u(t)$ se $s = t$;

inoltre, formalmente, $u'(s)ds = dy$.

Quindi

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{b(u(s))} ds = \int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{b(y)} dy$$

Sostituendo questa nella (29) si ottiene la (28).

Viceversa, ogni funzione $u : J \to Y$ che verifica la (28) è soluzione del problema di Cauchy (26).

Per dimostrare questa affermazione indichiamo con $B(y)$ la primitiva della funzione $\frac{1}{b(y)}$ nulla per $y=\alpha$, i.e.,

(30) $$B(y) := \int_{\alpha}^{y} \frac{1}{b(s)}\, ds, \quad y \in Y.$$

La funzione B è derivabile con derivata

$$B'(y) = \frac{1}{b(y)} > 0 \quad \forall y \in Y.$$

Ne viene che B è strettamente crescente, onde iniettiva; dunque si ha

$$B : Y \xrightarrow[1-1]{su} B(Y)$$

Osserviamo esplicitamente che $B(Y)$ è un intervallo, essendo B continua ed Y un intervallo.

La funzione B è quindi invertibile e la sua inversa B^{-1} ha come dominio l'intervallo $B(Y)$:

$$B^{-1} : B(Y) \longrightarrow Y.$$

Inoltre, essendo $B'(y) = \frac{1}{b(y)} > 0$, la funzione B^{-1} è derivabile in ogni punto.

Osserviamo ora che la identità (28), verificata per ipotesi dalla funzione u, si può scrivere così:

$$(31) \quad B(u(t)) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \quad \forall t \in J,$$

onde $\int_{t_0}^{t} a(s)ds \in B(Y)$ e

$$u(t) = B^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \ \forall t \in J.$$

Questo dimostra, in particolare, che u è derivabile, in quanto composizione di funzioni derivabili.

Dalla (31) si ottiene poi

$$B'(u(t))\, u'(t) = a(t) \quad \forall t \in J$$

e quindi, per la (30)

$$\frac{1}{b(u(t))} u'(t) = a(t) \quad \forall t \in J.$$

Questo dimostra che u è soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = a(t)\,b(y).$$

D'altra parte, ancora dalla (25) segue

$$\int_{\alpha}^{u(t_0)} \frac{1}{b(y)}\,dy = 0 .$$

Questo può succedere solo se $u(t_0) = \alpha$ in quanto, essendo $\frac{1}{b(y)} > 0$, se fosse $u(t_0) \neq \alpha$ sarebbe

$$\int_{\alpha}^{u(t_0)} \frac{1}{b(y)}\,dy \neq 0$$

Questo dimostra che u è soluzione del problema di Cauchy (26) e conclude la dimostrazione della proposizione. #

NOTA. Di quanto visto nel corso della precedente dimostrazione, vogliamo esplicitamente sottolineare quanto segue. Essendo I e Y intervalli aperti, $t_0 \in I$, $\alpha \in Y$ e $u(t_0) = \alpha$, dalla continuità di u segue che $u(t) \in Y$ almeno per tutti i "tempi" t di un opportuno intervallo aperto centrato in t_0. Quindi J, il dominio di u è un intervallo avente t_0 come suo punto interno. Dalla formula (28) segue inoltre che l'intervallo J "massimale", cioè il più grande intervallo sul quale si può estendere la soluzione del problema di Cauchy (26) è il più grande intervallo J contenente t_0 e tale che

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \in B(Y) \quad \forall\, t \in J.$$

Illustriamo quanto appena detto col seguente esempio.

<u>Esempio</u> 6.- Risolviamo il problema di Cauchy

$$(32) \qquad \begin{cases} y' = (1+y^2)\, 2\cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una funzione $u: J \to \mathbb{R}$ è soluzione di questo problema se e solo se

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int_0^t 2\cos(s)\,ds \quad \forall t \in J,$$

essendo J un intervallo contenente $t_0 = 0$.
Da questa identità si ottiene

$$\operatorname{arctg}(u(t)) - \operatorname{arctg}(0) = 2\,\mathrm{sen}\,t$$

e quindi

$$\operatorname{arctg}(u(t)) = 2\,\mathrm{sen}\,t$$

per ogni $t \in J$. Questo richiede che sia $-\frac{\pi}{2} < 2\,\mathrm{sen}\,t < \frac{\pi}{2}$ per

per ogni $t \in J$. Dunque dovrà essere

$$J \subseteq \left] -\arcsin \frac{\pi}{4}, \arcsin \frac{\pi}{4} \right[$$

e

$$u(t) = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} t) \quad \forall t \in J$$

Il più grande intervallo J per cui questo avviene è

$$J^* = \left] -\arcsin \frac{\pi}{4}, \arcsin \frac{\pi}{4} \right[.$$

Quindi

$$u^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u^*(t) = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} t)$$

è la soluzione con dominio massimale del problema di Cauchy (32) #

- Studiamo ora il problema di Chauchy (26), che riportiamo qui per comodità di lettura:

$$(26) \quad \begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}, \quad t_0 \in I, \ \alpha \in Y,$$

nel caso in cui la funzione b si annulli in qualche punto di Y.

Abbiamo visto nel Commento 2, a pagina 43, che se $b(\alpha)=0$ il problema di Cauchy (26) può avere infinite soluzioni distinte. Questa patologia non si presenta se la funzione b, pur annullandosi in qualche punto, è derivabile, con derivata continua.

La rimozione di questo genere di patologia, è garantita dalla seguente proposizione.

Proposizione 3. Siano

$u : J_1 \to Y$ e $v : J_2 \to Y$

due soluzioni dell'equazione differenziale $y' = a(t)\, b(y)$ tali che

$u(t_0) = v(t_0)$ in un punto

$$t_0 \in J := J_1 \cap J_2 .$$

Se la funzione b è di classe C^1 - i.e., derivabile in ogni punto con $y \mapsto b'(y)$ continua - allora

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in J .$$

La dimostrazione di questa proposizione si fonda sui due lemmi seguenti, aventi interesse anche indipendente dalla Proposizione 3.

Lemma 4. Sia $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

(i) $v(a) = 0$ e $v(t) \geq 0 \ \forall t \in [a,b]$;

(ii) $v'(t) \leq L\, v(t) \ \forall t \in [a,b]$, per una opportuna costante $L > 0$.

Allora $v \equiv 0$ in $[a,b]$.

<u>Dimostrazione</u> Poniamo $w(t) = e^{-L(t-a)} v(t)$, $t \in [a,b]$. Questa è una funzione derivabile in $[a,b]$, è non negativa con $w(a) = v(a) = 0$. Risulta poi

$$w'(t) = -L e^{-L(t-a)} v(t) + e^{-L(t-a)} v'(t)$$
$$= e^{-L(t-a)} \left(-L v(t) + v'(t)\right),$$

e quindi $w'(t) \le 0$ per ogni $t \in [a,b]$. Da questo segue che w è monotona decrescente in $[a,b]$.

Allora, per $a \le t \le b$, si ha

$$0 = w(a) \ge w(t) \ge 0,$$

e quindi $w(t) = 0$. Ne viene

$$v(t) = e^{L(t-a)} w(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

#

<u>Lemma 5</u>. <u>Sia</u> $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>una funzione continua tale che</u>:

(i) $v(a) = 0$ <u>e</u> $v(t) \ge 0$ <u>per ogni</u> $t \in [a,b]$;

(ii) $v(t) \leq L \int_a^t v(s)\,ds$ per ogni $t \in [a,b]$ e per una opportuna costante $L > 0$.

Allora $v(t) = 0$ per ogni $t \in [a,b]$.

Dimostrazione. Poniamo

$$w(t) = \int_a^t v(s)\,ds \quad , \; t \in [a,b].$$

Risulta: $w(a) = 0$, $w(t) \geq 0$ per ogni $t \in [a,b]$, w derivabile in ogni punto con

$$w'(t) = v(t) \leq L \int_a^t v(s)\,ds$$

e quindi $w'(t) \leq L\, w(t)$ per ogni $t \in [a,b]$. Per il Lemma 4 questo implica $w \equiv 0$ in $[a,b]$; pertanto, per la definizione di w,

$$\int_a^t v(s)\,ds = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Di conseguenza, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$v(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t v(s)\,ds = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

#

Dimostrazione della Proposizione 3

Dimostriamo la Proposizione nella ulteriore ipotesi che esista una costante $L > 0$ tale che

$$|a(t)| \leq L \quad e \quad |b'(y)| \leq L$$

per ogni $t \in I$ e per ogni $y \in Y$.

L'argomento che useremo sotto queste particolari ipotesi si può adattare con qualche semplice tecnicismo al caso generale.

Le ipotesi su u e v implicano

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, b(u(s))\, ds$$

e

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, b(v(s))\, ds$$

per ogni $t \in J = J_1 \cap J_2$. Sottraendo membro a membro le due identità precedenti, tenendo conto che, per ipotesi, si ha anche $u(t_0) = v(t_0)$, si ottiene

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\big(b(u(s)) - b(v(s))\big)\, ds$$

Ora, per il Teorema del valor medio di Lagrange, esiste un punto z nell'intervallo orientato $\overrightarrow{[u(s), v(s)]}$ $(\subseteq Y\,!)$ tale che

$$|b(u(s)) - b(v(s))| = |b'(z)(u(s) - v(s))| \le L\,|u(s) - v(s)|.$$

Utilizzando questa nella (33), e ricordando che anche $|a(s)| \le L$, otteniamo,

$$|u(t) - v(t)| \le L^2 \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)|\, ds$$

per ogni $t \ge t_0$, $t \in J$.

Posto $w(t) = |u(t) - v(t)|$ questa ultima disuguaglianza si può scrivere così:

$$w(t) \leq L^2 \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds \quad \forall t \geq t_0,\ t \in J.$$

Poichè w è continua, non negativa e verifica $w(t_0) = 0$, per il Lemma 5 possiamo concludere che $w(t) = 0$ per ogni $t \in J$, $t \geq t_0$. In altri termini

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in J,\ t \geq t_0.$$

In modo analogo si dimostra che

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in J,\ t \leq t_0.$$

Conclusione

$$u \equiv v \quad \text{in } J = J_1 \cap J_2,$$

come volevamo dimostrare. #

Torniamo ora al problema di Cauchy (26) (vedi pag. 50 e pag 58)

supponiamo che la funzione b sia di classe C^1 sull'intervallo $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Distinguiamo due casi

(A) $b(\alpha) = 0$. In questo caso il problema di Cauchy (26) ha una sola soluzione, la funzione

$$u_0 : I \to \mathbb{R} \quad , \quad u_0(t) = \alpha$$

Questa, banalmente, è soluzione del problema; la sua unicità segue dalla Proposizione 3

(B) $b(\alpha) \neq 0$. In questo caso indichiamo con Y_α il più grande sottointervallo di Y contenente α e tale che

$$b(y) \neq 0 \quad \forall y \in Y_\alpha .$$

Allora, per la Proposizione 2, una funzione $u : J \to Y_\alpha$, $J \subseteq I$, è soluzione di (26) se e solo se

$$\int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{b(y)}\,dy = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \ , \ \forall t \in J.$$

- Applichiamo le tecniche illustrate qui sopra allo studio del problema di Cauchy per l'equazione logistica

<u>Esempio 7</u>. <u>Problema di Cauchy per l'equazione di Verhulst.</u>

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(33) \qquad \begin{cases} y' = y - y^2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

L'equazione differenziale in (33) è l'equazione di Verhulst in (21)', pag. 37, nella quale, per semplicità di notazioni, abbiamo preso $\lambda = h = 1$. L'equazione rientra nella classe delle equazioni a variabili separabili in (22), con $a(t) = 1$ per ogni $t \in I = \mathbb{R}$, e $b(t) = y - y^2$

per ogni $y \in Y = \mathbb{R}$. La funzione b è di classe C^1 (di più: è C^∞, è un polinomio di secondo grado) ed ha due zeri:

$$y = 0 \quad e \quad y = 1$$

Di conseguenza il problema (33) con $\alpha = 0$ o con $\alpha = 1$ ha una sola soluzione, rispettivamente le funzioni costanti

$$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ u_0(t) = 0$$

e

$$u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ u_1(t) = 1$$

- Risolviamo ora (33) con $0 < \alpha < 1$.

Anzitutto osserviamo che Y_α, il più grande intervallo contenente α sul quale $b(y) \neq 0$, è l'intervallo

$$Y_\alpha :=]0, 1[$$

Pertanto, una funzione $u : J \to Y_\alpha$, (e quindi una funzione u tale che $0 < u(t) < 1$)

è soluzione di (33) se e solo se essa è la funzione implicitamente definita dall'equazione

$$(34) \qquad \int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{y-y^2}\,dy = \int_0^t ds \quad , \; t \in J.$$

Qui stiamo usando la Proposizione 2.
Sappiamo anche, dalla Proposizione 3, che due diverse soluzioni di (33) coincidono nella intersezione dei loro domini. Vogliamo determinare la soluzione con dominio massimale.
Ora, se $0 < u(t) < 1$, l'integrale al primo membro di (34) si scrive in forma chiusa nel modo seguente:

$$\int_{\alpha}^{u(t)} \frac{1}{y-y^2}\,dy = \int_0^{u(t)} \frac{1}{y(1-y)}\,dy =$$

$$\int_{\alpha}^{u(t)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \left[\log y - \log(1-y) \right]_{y=\alpha}^{y=u(t)}$$

$$= \log \frac{u(t)}{1-u(t)} - \log \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$= \log \left(\frac{u(t)}{1-u(t)} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \right).$$

Sostituendo questa al primo membro della (34) ed osservando che il suo secondo membro è uguale a t, otteniamo

$$\log \left(\frac{u(t)}{1-u(t)} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) = t$$

Da questa segue

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} e^t$$

dalla quale, risolvendo rispetto a $u(t)$, si ottiene

$$u(t) = \frac{\alpha e^t}{1-\alpha+\alpha e^t}$$

Il dominio naturale di questa

è l'intero asse reale.

<u>Conclusione</u>: se $0 < \alpha < 1$ la funzione

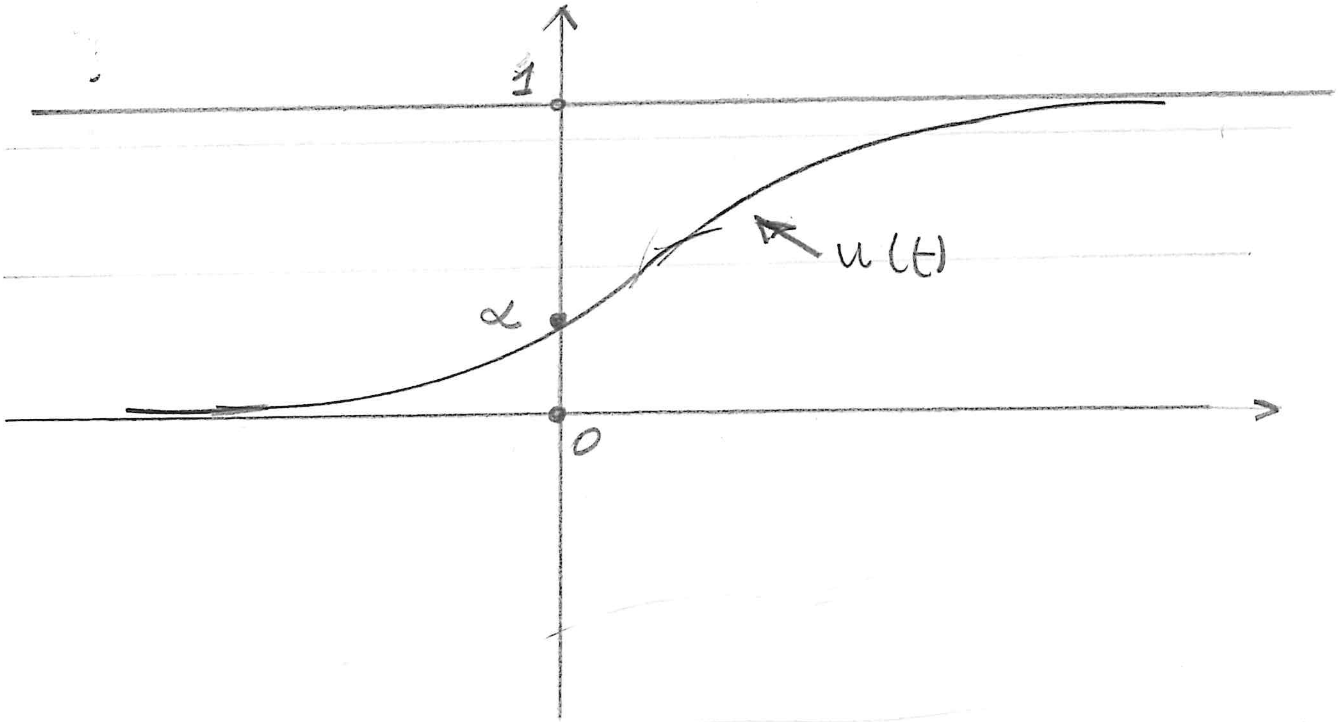
$$(35) \quad u(t) = \frac{\alpha e^t}{1-\alpha+\alpha e^t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

è la soluzione (unica) con <u>dominio massimale</u> del problema di Cauchy (33)

(33) con $0 < \alpha < 1$.

<u>Nota</u> La funzione $u(t)$, per $t \to +\infty$, tende al <u>valore di equilibrio</u> $u_\infty = 1$

Per $t \to -\infty$, $u(t)$ tende invece al <u>valore di equilibrio</u> $u_\infty = 0$



• Risolviamo ora il problema di Cauchy (33) nel caso di $\underline{\alpha > 1}$

Il più grande intervallo contenente α, e sul quale $b(y) = y - y^2$ è sempre diverso da zero, è il seguente

$$Y_\alpha =]1, +\infty[$$

Per la Proposizione 2, una funzione

$$u : J \longrightarrow Y_\alpha$$

è soluzione di (33) se e solo se essa è la funzione definita implicitamente dall'equazione

$$(36) \qquad \int_\alpha^{u(t)} \frac{1}{y-y^2}\, dy = t \quad \left(= \int_0^t ds \right)$$

con $t \in J$ (si noti: qui $\alpha, u(t) > 1$!).

Scriviamo:

$$\int_\alpha^{u(t)} \frac{1}{y-y^2}\, dy = \int_\alpha^{u(t)} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) dy$$

$$= \Big[\log y - \log(y-1) \Big]_{y=\alpha}^{y=u(t)}$$

$$= \log \frac{u(t)}{u(t)-1} - \log \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$= \log \left(\frac{u(t)}{u(t)-1} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right).$$

Sostituendo questa al primo membro della (36) otteniamo

$$\log \left(\frac{u(t)}{u(t)-1} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) = t,$$

onde

$$\frac{u(t)}{u(t)-1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{t}$$

Questa è equivalente alla seguente

$$u(t) = \frac{\alpha e^{t}}{\alpha e^{t} - (\alpha - 1)}$$

Il più grande intervallo J contenente $t = 0$ sul quale $u(t) > 1$ è quello sul quale risulta $\alpha e^{t} > (\alpha - 1)$

$$\alpha e^t > \alpha - 1 \iff t > \log \frac{\alpha-1}{\alpha} =: \beta$$

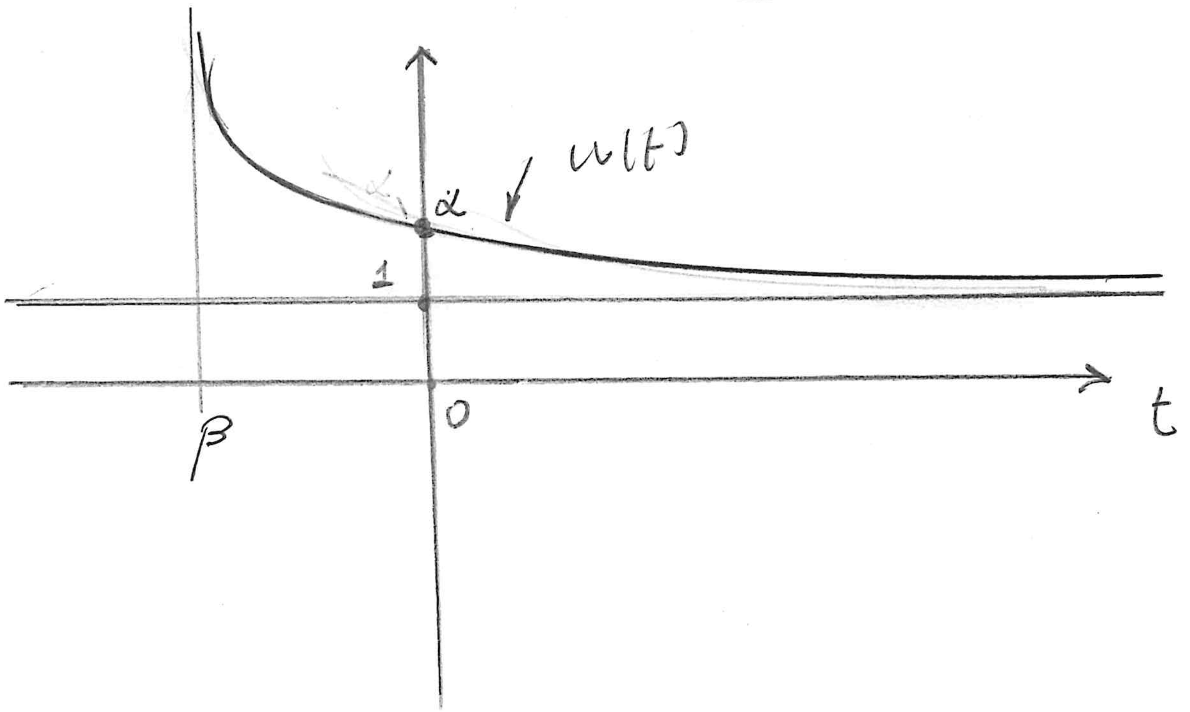
(ricordiamo: $\alpha > 1$; quindi $\beta = \log(1-\frac{1}{\alpha}) < 0$)

<u>Conclusione</u>: se $\alpha > 1$ la funzione

$$(37) \quad u(t) = \frac{\alpha e^t}{\alpha e^t - (\alpha - 1)}, \quad t \in]\beta, +\infty[$$

è la unica soluzione con dominio massimale del problema di Cauchy (33)

Si noti che per $t \longrightarrow +\infty$ la funzione $u(t)$ in (37) tende al <u>valore di equilibrio $u_\infty = 1$</u>.



- Risolviamo ora il problema di Cauchy (33) nel caso di $\alpha < 0$ (1)

Procedendo come nei casi già trattati si trova che la funzione

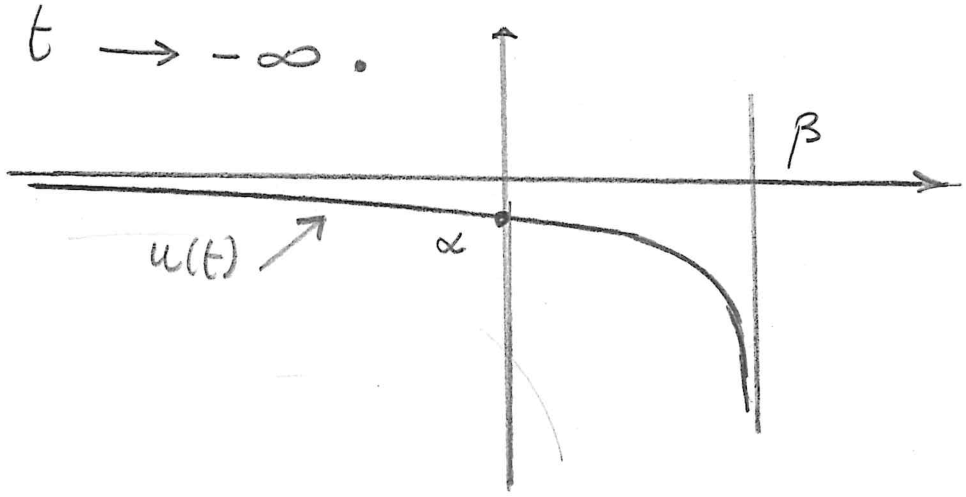
$$u(t) = \frac{\alpha e^t}{1 - \alpha + \alpha e^t}, \quad t \in]-\infty, \beta[$$

è soluzione di (33), con

$$\beta := \log\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Si noti che $\beta > 0$ essendo $\alpha < 0$.

Si può inoltre notare, per quel che vale, che $u(t) \longrightarrow 0$ per $t \to -\infty$.



---

(1) Ovviamente questo è un caso non biologicamente interessante: il numero di individui di una popolazione è > 0!