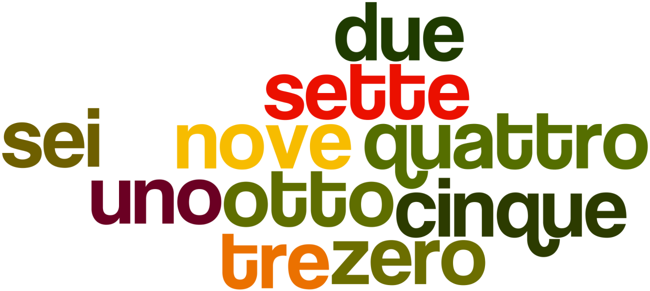
Dai Babilonesi al tablet: di tavoletta in tavoletta per il calcolo numerico delle radici



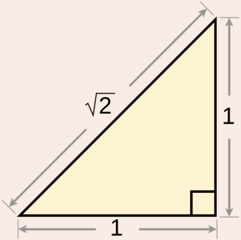
Germana Landi e Margherita Porcelli - Università di Bologna

II scuola estiva di Matematica - PLS Unibo - 13 sett 2023

Che cosa è la $\sqrt{2}$?

Che cosa è la $\sqrt{2}$?

1. quel numero positivo che elevato al quadrato dà 2: la soluzione positiva di
$$x^2 = 2$$
(aspetto algebrico)
2. la misura della diagonale di un quadrato il cui lato misura 1



(aspetto geometrico).

Proprietà della $\sqrt{2}$

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, i.e. non è razionale (aspetto algebrico).
2. il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il lato è incommensurabile (aspetto geometrico).

   Non esiste una grandezza (un segmento) che sia loro sottomultiltipla comune.

"Due proprietà separate da un abisso, anche se equivalenti da un punto di vista matematico: sono stati gli Arabi nel Medioevo a gettare un ponte tra i due" [1]

[1] *La favolosa storia della radice quadrata di due*, Benoît Rittaud, Bollati Boringhieri (2010)

Proprietà della $\sqrt{2}$

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, i.e. non è razionale (aspetto algebrico).
2. il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il lato è incommensurabile (aspetto geometrico).

   Non esiste una grandezza (un segmento) che sia loro sottomultiltipla comune.

"Due proprietà separate da un abisso, anche se equivalenti da un punto di vista matematico: sono stati gli Arabi nel Medioevo a gettare un ponte tra i due" [1]

[1] *La favolosa storia della radice quadrata di due*, Benoît Rittaud, Bollati Boringhieri (2010)

Matematica babilonese (2000 a.C.)

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504880...$$

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1.41421296296296 3$$

- I babilonesi sono la prima civilà antica a portare un contributo nella matematica
- Cenni: base 60, numerazione posizionale, tavole con quadrati, cubi, radici quadrate, radici cubiche
- Esigenza applicativa: misurare lunghezze, pesi, scambiare denaro, calcolare interessi, astronomia.

Matematica indiana (V sec a.C)

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504880\ldots$$

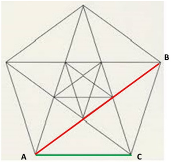
"Allungate l'unità di un terzo, poi questo terzo di un quarto di se stesso meno un trentaquattresimo di quest'ultima parte", *Sulvasutras* di Apastamba (V o IV sec a.C)

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686$$

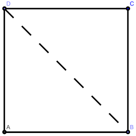
- precisione leggermente inferiore all'approssimazione babilonese, ma non è legata ad una base di numerazione.

Matematica greca (scuola pitagorica, V sec. a. C.)

- Ippaso da Metaponto scopre che esistono alcuni rapporti tra grandezze che non possono essere espressi mediante numeri interi $\Rightarrow$ crisi matematica greca "tutto è numero (intero)".



$$\text{Rapporto Aureo} = \frac{\text{lato del pent}}{\text{diagonale del pent}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

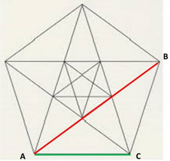


$$\text{Rapporto Argenteo} = \frac{\text{lato del quad}}{\text{diagonale del quad}} = \sqrt{2}$$

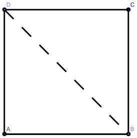
- Rettangolo aureo: larghezza/lunghezza $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- Rettangolo diagonale (o argenteo): larghezza/lunghezza $= \sqrt{2}$

Matematica greca (scuola pitagorica, V sec. a. C.)

- Ippaso da Metaponto scopre che esistono alcuni rapporti tra grandezze che non possono essere espressi mediante numeri interi $\Rightarrow$ crisi matematica greca "tutto è numero (intero)".



$$\text{Rapporto Aureo} = \frac{\text{lato del pent}}{\text{diagonale del pent}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



$$\text{Rapporto Argenteo} = \frac{\text{lato del quad}}{\text{diagonale del quad}} = \sqrt{2}$$

- Rettangolo aureo: larghezza/lunghezza $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- Rettangolo diagonale (o argenteo): larghezza/lunghezza $= \sqrt{2}$

Matematica araba (IX sec)

- L'opera di Al-Khwarismi permette di elaborare il formalismo algebrico per le operazioni (concetto di equazione):
  - "se una linea retta è tagliata a piacere, il suo quadrato è uguale ai due quadrati delle due parti più due volte il rettangolo costruito su tali parti", Euclide, *Elementi*, libro II, prop 4.
  - per ogni x, y $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Nuova definizione di $\sqrt{2}$

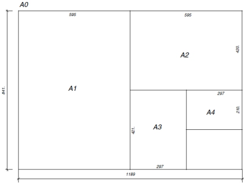
$\sqrt{2}$ è la soluzione (positiva) dell'equazione

$$x^2 = 2$$

- $\sqrt{2}$ mantiene il suo significato geometrico, ma diventa un numero la cui esistenza non dipende da altre entità (concezione moderna)

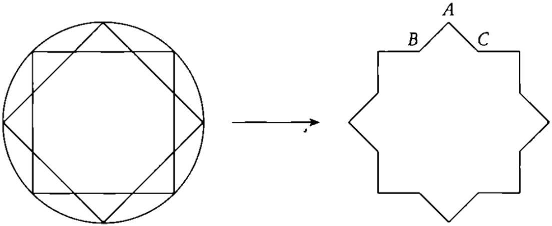
Curiosità ed applicazioni

- Formati UNI dei fogli di carta (A2,A3, A4, etc.): $\sqrt{2}$ é approssimativamente il rapporto che fra il lato più corto e quello piú lungo (idea nota dal 1786, ISO nel 1975).
  Foglio di carta A0: un rettangolo di area pari a 1 mq e lati nel rapporto radice quadrata di 2.



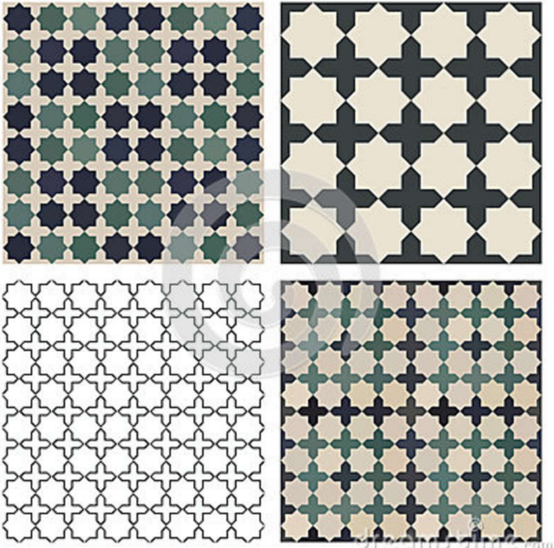
- Arte islamica, arte greca e arte rinascimentale (Leon Battista Alberti, Piero della Francesca)

Mattonelle islamiche



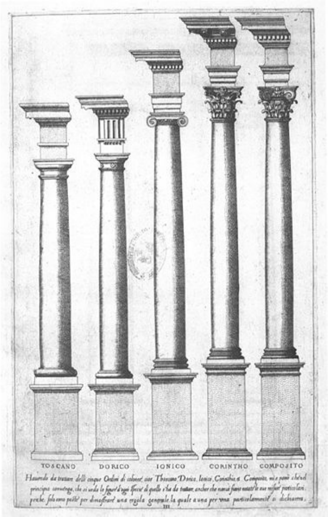
- $BC/AC = \sqrt{2}$.

Mattonelle islamiche



Porta di Armonia, di Michel Ventrone, Annemasse, Francia (1997)

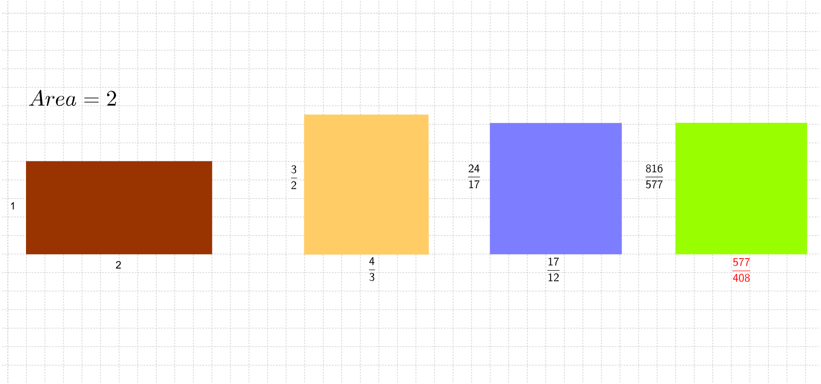
Il piedistallo della colonna dorica



Metodi per estrarre la radice quadrata

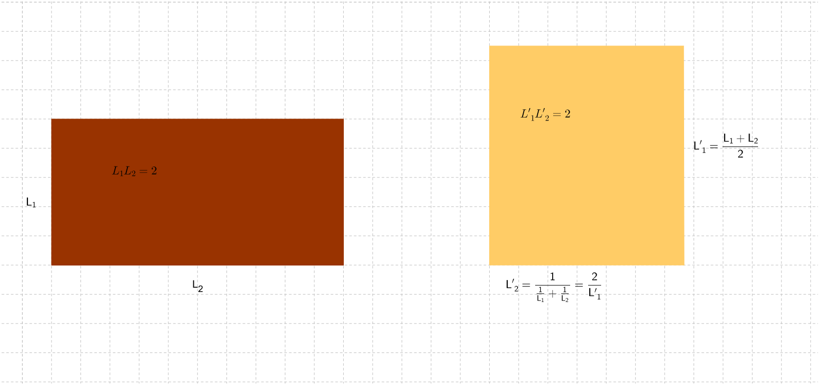
- Metodo della dicotomia: individuare un'approssimazione per difetto e uno per eccesso e poi testare un valore intermedio (metodo di bisezione)
- Metodo all'antica (cinese Sun Tzu IV sec, indiano Aryabhata VI sec): *Si dividerà sempre la parte non quadrata per il doppio della radice quadrata [che precede], dopo aver tolto dalla parte quadrata il quadrato della radice: il quoziente è la radice della distanza di un posto*
  - Metodo utilizzato dagli Arabi nel Medioevo e poi dagli occidentali fino alla seconda metà del XX sec.

Metodi per estrarre la radice quadrata: rettangoli che si trasformano in quadrati



A partire da un rettangolo di area 2 con base b e altezza h ($bh = 2$), determinare il quadrato di area 2 (cioè di lato l tale che $l^2 = 2$).

Metodo Babilonese (2000 a.C) - Formula di Erone (*Metriche*, I d.C.) - Metodo di Newton (1671)

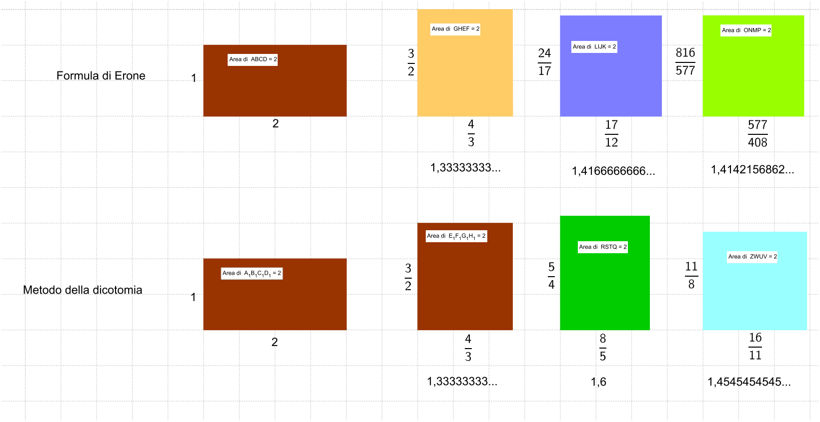


- Media aritmetica: $L_1 = \frac{L_1+L_2}{2}$
- Media armonica: $L'_2 = \frac{1}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}}$

$$L' = \frac{1}{L} + \frac{L}{2}$$

(Media geometrica $L' = \sqrt{L_1 L_2}$)

Attività: confronto tra i due metodi di approssimazione



Dai Babilonesi al tablet: calcoliamo con GeoGebra la radice quadrata di 2

www.geogebra.org

Calcoliamo con la radice quadrata di 2

Metodo babilonese

- Prendo b_1 "vicino" a $\sqrt{2}$ ($b_1^2 \approx 2$).
- Calcolo

$$b_2 = (b_1 + h_1)/2 = (b_1 + b_1/2)/2 \quad \text{e } h_2 = 2/b_2$$

- Calcolo

$$b_3 = (b_2 + h_2)/2 = (b_2 + b_2/2)/2 \quad \text{e } h_3 = 2/b_3$$

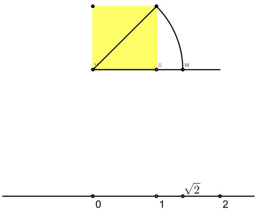
- e così via...

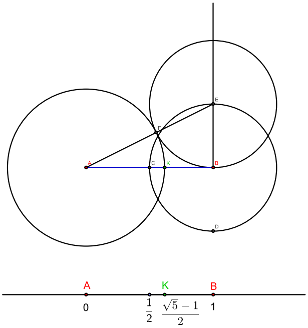
Calcoliamo la radice quadrata di 2

Metodo dicotomico

- Prendo *piccolo* e *grande* con $piccolo < \sqrt{2} < grande$.
- Calcolo
$$b_1 = (piccolo + grande)/2 \quad \text{e} \quad h_1 = 2/b_1$$
- Se $b_1^2 > 2$, allora
$$grande_1 = b_1 \quad \text{e} \quad piccolo_1 = piccolo$$
Altrimenti,
$$piccolo_1 = b_1, \quad \text{e} \quad grande_1 = grande$$
- Calcolo
$$b_2 = (piccolo_1 + grande_1)/2 \quad \text{e} \ h_2 = 2/b_2$$
- e così via...

Costruzione di $\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (misura delle diagonali del quadrato e del pentagono di lato unitario)





$$\bar{A}B/\bar{A}K = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Con il *Teorema della secante e della tangente* si dimostra che AK è la sezione aurea di AB, i.e. $AB : AK = AK : KB$ (similitudini).