Spazio e tempo classici: il punto di vista dei sistemi dinamici

Nicola Arcozzi, 2020, PLS

Dicotomie chiave: deterministico/casuale; reversibile/irreversibile; invariante/non invariante nel tempo; causale/non causale.

Classicamente `tempo` e `spazio` sono due oggetti ben separati, che interagiscono tra loro nella `dinamica` (evoluzione nel tempo di configurazioni spaziali). Lo studio delle configurazioni spaziali in sé è la "geometria". Una sfera si muove nello spazio tridimensionale, una popolazione di alghe ricopre una prozione variabile di una superficie di un lago, un virus si diffonde sul pianeta... Queste nozioni sono adattabili a contesti molto diversi: la successione dei lanci di una moneta, in cui lo "spazio" è Testa/Croce; lo svolgersi di una dimostrazione matematica dalle sue premesse (ipotesi) alle sue conclusioni (tesi); la successione dei numeri di individui in due specie coabitanti di cui una è predatrice e l'altra preda; una reazione chimica...

Le caratteristiche principali dei sistemi dinamici possono essere illustrate in contesti molto semplici, che però già esibiscono comportamenti complessi. Il nostro *spazio* sarà un insieme finito di *stati* $\mathcal{E}=\{A,B,\dots\}$ e il *tempo* sarà *discreto*: $n=0,1,2,\dots$. Al tempo n il sistema si trova nello stato $f(n)$.

1 Sistemi in cui il futuro dipende dal presente

Il sistema più semplice consiste in una `legge` che ci dice dove il sistema sarà al tempo $n+1$, conoscendo la sua posizione al tempo n. Cioè, una maniera di determinare $f(n+1)$ conoscendo $f(n)$. Questi sistemi sono `causali`: il comportamento di un sistema in questo momento non può fare riferimento a informazione futura.

1.1 Sistemi con due stati

Se per esempio $\mathcal{E}=\{T,C\}$, esempi di sistemi dinamici di questo tipo sono:

- $f_1(n+1)=\begin{cases} C \text{ se } f_1(n)=T \\ T \text{ se } f_1(n)=C \end{cases}$, che cambia lo stato a ogni istante da testa a croce e viceversa;
- $f_2(n+1)=\begin{cases} C \text{ se } f_2(n)=C \\ T \text{ se } f_1(n)=T \end{cases}$, che lascia il sistema nello stesso stato;
- $f_3(n+1)=\begin{cases} C \text{ se } f_1(n)=T \text{ e } n\leqslant 3 \\ T \text{ se } f_1(n)=C \text{ e } n\leqslant 3 \\ C \text{ se } f_1(n)=C \text{ e } n>3 \\ T \text{ se } f_1(n)=T \text{ e } n>3 \end{cases}$, che funziona come f_1 per tempi piccoli e come f_2 per tempi grandi.

Questi sistemi sono certamente `deterministici`: conoscendo il passato e il presente del sistema (anzi, il solo presente, in questo caso), posso con certezza predirne il futuro. Un sistema `non deterministico`, è uno in cui passato e presente non determinano il futuro, in genere perché il sistema ha un certo margine di `aleatorietà`. Per esempio,

- all'istante n lancio una moneta e pongo $f_4(n)=\begin{cases} C \text{ se esce Croce} \\ T \text{ se esce Testa} \end{cases}$,
- all'istante n chiedo a mia figlia e pongo $f_5(n)=\begin{cases} C \text{ se sceglie Croce} \\ T \text{ se sceglie Testa} \end{cases}$.

In f_4 e f_5 scontiamo l'insufficiente informazione sul funzionamento del sistema: la difficilmente prevedibile dinamica del lancio d'una moneta, la libera scelta di mia figlia. Nella teoria classica, l'aleatorietà consiste nella carenza di informazione, che può a volte essere quantificata e utilizzata per fare previsioni aleatorie.

Tornando al caso deterministico, negli esempi f_1, f_2, f_3 abbiamo bisogno di un `dato iniziale` per determinare la `traiettoria` del sistema. Prendiamo il caso f_1. Se $f_1(0)=C$, allora $f_1(1)=T$, $f_1(2)=T,\dots$ Abbiamo cioè la traiettoria $CTCTCTC\dots$. Nel caso di $f_3(0)=C$ la traiettoria diventa invece CTC TC $CCCC\dots$Abbiamo infatti un cambiamento di regime a $n=3$.

La differenza tra f_1 e f_2 da un lato e f_3 dall'altro è che la legge nei primi due esempi non dipende esplicitamente da n (dà solo una regola passato→futuro che agisce allo stesso modo a ogni istante), mentre in f_3 la legge dipende dal tempo. Cioè, il sistema descritto da f_1 e f_2 è `invariante nel tempo`, mentre quello descritto da f_3 non lo è.

Le leggi della natura sono deterministiche e invarianti nel tempo (entro certi intervalli, almeno) e così lo è il funzionamento dei macchinari (o almeno abbiamo fiducia che lo sia). Determinismo e invarianza pongono drastiche restrizioni ai corrispondenti sistemi dinamici e ai loro possibili comportamenti.

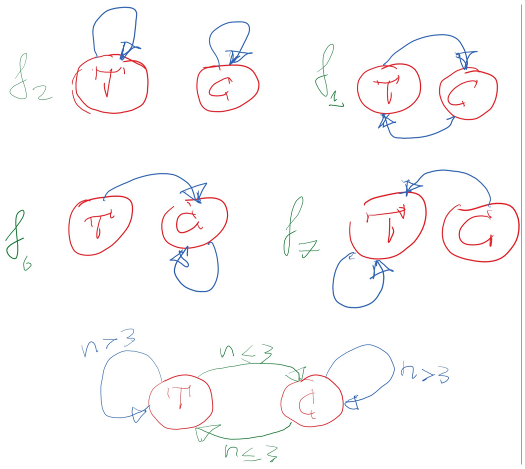
Scriviamo per esempio la libreria completa dei sistemi con due stati C, T che sono deterministici, invarianti nel tempo e in cui il futuro dipende dal solo presente. Ci basta prescrivere la legge che fa passare da $f(n)$ a $f(n+1)$. Oltre a f_1 e f_2 vi troviamo

- $f_6(n+1) = \left\{ \begin{smallmatrix} C \text{ se } f_6(n) = T \\ C \text{ se } f_6(n) = C \end{smallmatrix} \right.$ e $f_7(n+1) = \left\{ \begin{smallmatrix} T \text{ se } f_7(n) = T \\ T \text{ se } f_7(n) = C \end{smallmatrix} \right.$.

Non ve ne sono altri. Le traiettorie di f_6 sono $TCCC\ldots$ e $CCCC\ldots$

Tra f_1 e f_2 da un lato e f_6, f_7 dall'altro c'è una differenza importante. Se so che $f_1(3) = C$, posso procedere a ritroso e trovare la traiettoria completa: $TCT\boldsymbol{C}TC\ldots$ Invece da $f_6(3) = C$ non posso ricavare $f_6(0)$. Quando la conoscenza del futuro (spesso di una sola porzione di futuro) mi permette di dedurre i valori passati, dico che il sistema è `reversibile` (come in f_1, f_2); altrimenti è `irreversibile` (come in f_6,f_7). La reversibilità, o la sua assenza, è ovviamente un aspetto fondamentale nelle scienze di tipo storico (comprese la cosmologia, l'evoluzione naturale, la genetica delle popolazioni, la linguistica storica, la geologia...). Nei sistemi irreversibili la storia non è conoscibile, in linea di principio, oltre una certa precisione.

Possiamo illustrare semplicemente i sistemi deterministici e invarianti nel tempo, in cui il futuro dipende dal solo presente, mediante dei `grafi`. Indichiamo con delle frecce l'evoluzione del sistema da n a $n+1$. In f_1, si passa da C a T e viceversa.



L'ultimo grafo, la cui struttura cambia da $n=3$ a $n=4$, corrisponde a f_3, che non è invariante nel tempo.

Sistemi non deterministici. Anche un sistema non deterministico può essere o meno invariante nel tempo. Per esempio, prendiamo $f_4(n) = \left\{ \begin{smallmatrix} C \text{ se esce Croce} \\ T \text{ se esce Testa} \end{smallmatrix} \right.$ dove la moneta ha un 50% di dare Testa e 50% di dare Croce. Possiamo rappresentarlo con un `grafo pesato`, in cui le frecce riportano la probabilità di evolvere in un modo o nell'altro. La teoria matematica che si occupa di questi sistemi è quella delle `catene di Markov`.

1.2 Sistemi con più di due stati

Consideriamo un sistema con tre stati A, B, C, *deterministico, invariante nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente*. Possiamo rappresentarlo con un grafo avente i suoi nodi in A, B, C e frecce che li congiungono.

- Da ogni stato deve uscire una freccia (il sistema si evolve in qualche direzione) e una sola (l'evoluzione è determinata dal punto in cui ci si trova).
- Il sistema è reversibile se e solo se in ogni stato arriva una sola freccia.

- Possiamo identificare il sistema con una funzione ϕ: $\{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$, dove $f(n+1) = \phi(f(n))$. Questo sistema è invariante nel tempo (non lo sarebbe se $\phi = \phi_n$ fosse una funzione dipendente da n) ed è reversibile se e solo se ϕ è biunivoca (se e solo se è iniettiva).

Queste considerazioni valgono senza cambiamenti per un numero finito di stati $A_1, \ldots, A_l$. Quali fenomeni osserviamo?

- Dopo un certo tempo, il sistema va "a regime" evolvendosi `periodicamente`.
- Le `orbite` del sistema sono tra loro disgiunte.
- Quando il sistema è reversibile, le orbite riempiono tutto il sistema degli stati. Se il sistema è irreversibile, alcuni stati vengono abbandonati definitivamente.
- Studio del `flusso` del sistema: $F(X, n) = f(n)$ dove $f(0) = X$ è lo stato iniziale.
- Un sistema *deterministico* con insieme di stati $\mathcal{E}$ (invariante o meno che sia nel tempo) *in cui il futuro dipende dal solo presente* è *reversibile* se e solo se per ogni n la funzione $f(n) \mapsto f(n+1)$ da $\mathcal{E}$ in sé è biunivoca. Ciò vale anche in presenza di infiniti stati.
- Nel caso di *sistemi invarianti nel tempo* ciò è equivalente a chiedere che $f(0) \mapsto f(1)$ sia biunivoca (vedi sopra).

Sistemi con infiniti stati. Supponiamo di avere infiniti stati A_1,..., A_m,...In molte idealizzazioni di sistemi reali avere infiniti stati (spesso un *continuo* di stati) è una necessità. Consideriamo sempre sistemi *deterministici, invarianti nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente*, rappresentati da frecce che congiungono gli stati. In questo caso l'evoluzione del sistema può essere assai più complessa, sia nel caso reversibile che in quello irreversibile.

- Un sistema deterministico $f(n+1) = \phi(f(n))$ invariante nel tempo in cui il futuro dipende solo dal presente è reversibile se e solo se ϕ è iniettiva.
- In un sistema reversibile con infiniti stati, partendo dal dato iniziale $f(0) = X$, può andare a regime in uno dei seguenti due modi: (a) da un certo punto in poi entra in un'orbita periodica; (b) descrive un'orbita infinita senza ripetizioni.
- Il flusso di un sistema reversibile "conserva il volume" (cioè, se A è un insieme finito di stati, allora $\{f(n): f(0) \in A\}$ ha un numero di elementi che non dipende da n) anche nel caso di infiniti stati.
- Se il sistema è irreversibile, è possibile anche che (c) il sistema descrive un'orbita infinita, che può anche avere infinite ripetizioni.

$3x + 1$. I sistemi con infiniti stati non sono del tutto compresi e i problemi semplici da enunciare, ma **mai risolti**, vi abbondano. Consideriamo come insieme degli stati gli interi positivi $1, 2, \ldots, m, \ldots$ e come legge (invariante nel tempo): $g(n+1) = \begin{cases} g(n)/2 \text{ se } g(n) \text{ è pari} \\ 3\,g(n) + 1 \text{ se } g(n) \text{ è dispari} \end{cases}$. Una traiettoria è, per esempio, $1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$, periodicamente, e un'altra è $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$ che da qui procede periodicamente. A oggi, non si sa se ogni traiettoria finisca nel periodo $1, 2$.

1.3 Sistemi il cui passato è infinito

Negli studi di tipo storico quello che conta è il passato, che deve essere significativamente esteso. Per tenere conto di questo, è comodo usare per il tempo numeri sia positivi che negativi: $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Avendo un tempo infinito in entrambe le direzioni ci aiuta anche a meglio concettualizzare la distinzione tra sistemi revesibili e irreversibili.

- Un sistema *con finiti stati, deterministico, invariante nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente*, è irreversibile se e solo se cambiando il verso delle frecce ottengo un sistema dello stesso tipo.
- Se invece è irreversibile (sempre con finiti stati), allora invertendo il senso delle frecce ottengo un sistema (a) in cui qualche stato iniziale non si evolve per nulla; (b) qualche stato iniziale si evolve in maniera non deterministica.
- L'invarianza temporale di un sistema (*con finiti stati, deterministico, in cui il futuro dipende dal presente*) può essere formulata in termini puramente osservazionali (senza entrare nella sintassi della legge che lo determina): il sistema è invariante se e solo se l'insieme delle sue orbite è `invariante per traslazione temporale`.

- Nel caso di infiniti stati bisogna usare più cautela, ma conclusioni simili sono sostanzialmente valide.

Rappresentazione di un sistema mediante grafici spazio tempo. Come negli usuali grafici tempo-spazio, mettiamo il tempo n in ascissa e la posizione (lo stato) in ordinata.

2 Sistemi in cui il futuro dipende da presente e passato

2.1 Sistemi in cui $f(n+1)$ dipende solo da $f(n)$ e $f(n-1)$.

La seconda legge della dinamica di Newton ci dice che l'evoluzione di un sistema $f(t)$ dipendente dal tempo t (conoscendo le forze agenti su di esso) è determinata da posizione e velocità iniziali. Ci basta cioè conoscere, a un istante iniziale t_0, $f(t_0)$ e $f(t_0-dt)$ (con $dt>0$ "infinitesimo"), quindi anche la velocità

$$\dot{f}(t_0)=\frac{f(t_0)-f(t_0-dt)}{dt}.$$

(Non dite mai questo a un docente di matematica!) Notare l'inusuale segno meno nell'incremento, che vorrebbe significare che al momento t_0 possiamo solo contare su informazione presente o passata, non futura. Matematicamente parlando, i segni più e meno svolgono qui lo stesso ruolo (ma non nella teoria dei processi stocastici!)

Discretizzando il tempo, i sistemi di tipo newtoniano sono quelli il cui stato al tempo $n+1$ è determinato dagli stati presente e immediatamente passato, $f(n)$

Supponiamo di avere due stati T,C. Quello che ci serve (caso deterministico) è una legge che ci fa passare da $f(n)$ e $f(n-1)$ a $f(n+1)$.

- $f_8(n+1)=\begin{cases} C \text{ se la successione } f_8(n-1), f_8(n-1) \text{ è } CC \text{ o } CT \\ T \text{ altrimenti} \end{cases}$

La legge non fa esplicito riferimento al tempo, quindi è `invariante nel tempo`. Per conoscere la traiettoria del sistema dobbiamo conoscere $f(0)$ e $f(1)$, che ci dà le successioni iniziali CC, CT, TC, TT. Le possibili traiettorie sono:

$$\begin{array}{rcl} CC & \to & CC\dots \\ CT & \to & CTCT\dots \\ TC & \to & TCTC\dots \\ TT & \to & TTT\dots \end{array}$$

Lo spazio delle fasi. Non è possibile rappresentare un sistema *deterministico, invariante nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente* **e** *dall'immediato passato* con un grafo avente nodi C,T. Però, pensandoci su, possiamo farlo arricchendo la struttura dei nodi tenendo conto dell'immediato passato. Consideriamo il grafo avente nodi CC, CT, TC e TT. Il sistema f_8 ha come frecce $CC\to CC$, $CT\to TC$, $TC\to CT$ e $TT\to TT$.

I quattro vertici del nuovo grafico codificano, in un certo senso, posizione e velocità. Essi costituiscono lo `spazio delle fasi` del sistema. L'evoluzione del sistema può essere studiata nello spazio delle fasi allo stesso modo in cui, nel caso in cui c'era dipendenza dal solo presente, bastava considerare lo spazio delle configurazioni C,T.

Il punto di vista dello spazio delle fasi è utile anche per progettare nuovi sistemi aventi comportamenti assegnati. Possiamo per esempio definire f_9 tracciando le frecce $CC\to CT$, $CT\to TC$, $TC\to CC$ e $TT\to TT$, un sistema che, come f_8, è anche *reversibile*; mentre f_{10} definito da $CC\to CT$, $CT\to TC$, $TC\to CT$ e $TT\to TT$ è *irreversibile*.

- Le possibili coppie $(f(n-1), f(n))$ nello spazio delle fasi si devono succedere in maniera che l'ultimo e il primo elemento di due coppie in successione coincidano, come nel domino. Quinti potremo avere TC seguito da CC o da CT, ma non da TT o TC.
- I sistemi T/C *deterministici, invarianti nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente e dall'immediato passato* sono $2^4=16$, mentre quelli che sono anche *reversibili* sono solo $2^2=4$.

Esercizio 1. Quanti sono i sistemi deterministici, invarianti nel tempo, in cui $f(n+1)$ dipende da $f(n-1)$ e $f(n)$, se l'insieme degli stati $\mathcal{E}=\{A,B,C\}$ ha tre elementi? Quanti di questi sono reversibili?

Esercizio 2. Mostrare che in in un sistema deterministico, invariante nel tempo, in cui $f(n+1)$ dipende da $f(n-1)$ e $f(n)$, con insieme di stati $\mathcal{E}$ finito, le traiettorie sono da un certo punto in poi deteministiche. Trovare un esempio in cui il sistema ha due stati, ma alcune orbite hanno periodo maggiore di due.

La nozione di spazio delle fasi si estende in maniera semplice e naturale a sistemi in cui il futuro dipende dallo stato del sistema ai tempi $n, n-1, n-2, \dots, n-l$. Pensiamo a un sistema "a maggioranza alternata": $f_{11}(n+1)=C$ se e solo se la maggioranza degli esiti tra $f_{11}(n-2)$, $f_{11}(n-1)$ e $f_{11}(n)$ è T:

$$\begin{aligned} CCC &\to TTCCTTCCT\dots \\ CCT &\to TCTCT\dots \\ CTC &\to TCTC\dots \\ TCC &\to TTCCT\dots \end{aligned}$$

Notare i regimi a periodicità 2 e 4. Per gli altri quattro dati iniziali, basta scambiare T e C (simmetria!). Che le traiettorie del sistema siano periodiche dipende dal fatto che il sistema è codificato da un grafo con finiti nodi.

2.2 Sistemi che accumulano memoria

Può succedere che un sistema, pur essendo *deterministico e invariante nel tempo,* dipenda da tutto il suo passato, non da una porzione fissata di esso. Per esempio, $f_{12}(n)=C$ se e solo se la metà o più dei precedenti elementi della traiettoria sono T. Qui basta prescrivere un valore iniziale $f(0)$, ma potremmo anche pensare di prescrivere una stringa iniziale.

$$\begin{aligned} T &\to CCTCTC\dots \\ C &\to TCT\dots \end{aligned}$$

Si vede facilmente che si finisce in un periodo TC.

$$C \to TTTC$$

2.3 Il comportamento asintotico di un sistema

Molti sistemi "vanno a regime". Ciò è di interesse per molti motivi: (a) ciò che misuriamo oggi può essere il "regime" di un sistema che all'inizio esibiva comportamenti più imprevedibili; (b) vogliamo fare previsioni su dove si assesterà un sistema di cui stiamo ora misurando il comportamento iniziale. In molte epidemie, il comportamento a regime è l'endemia, che consiste nell'occasionale apparire di focolai ristretti nel tempo e nello spazio.

In un sistema dinamico f su un insieme di stati $\mathcal{E}$ finito o numerabile,diciamo che `un'orbita si disperde` se per ogni insieme finito di stati A esiste un $n(A)$ tale che $f(n)\notin A$ per ogni $n>n(A)$. Un'orbita che non si disperde è `ricorrente`. Le orbite periodiche sono un caso notevole di orbita ricorrente.

In un sistema deterministico, invariante nel tempo, in cui il futuro dipende dal presente e reversibile, ogni orbita è periodica (quindi ricorrente) o si disperde. Nei sistemi non reversibili questo non è affatto detto (vedi il problema del $3x+1$).

3 Alcuni esempi di sistemi in spazi di stati non discreti

3.1 Trasformare equazioni in algoritmi

Consieriamo qui solo una classe di casi particolari, che ci danno un algoritmo per calcolare le radici quadrate. Partiamo dall'equazione di secondo grado

$$x^2 = x+1, \text{ cioè } x = 1+\frac{1}{x}.$$

avente soluzioni $l_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Trasformiamola in una relazione per ricorrenza,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

Cerchiamo di capire come si comporta la successione $\{x_n\}$ osservandolo sul piano cartesiano, dove abbiamo tracciato i grafici delle funzioni $y = 1 + \frac{1}{x}$ e $y = x$ (vedi video del seminario). Notiamo come l_+ sia sempre compreso tra x_n e x_{n+1}. "Dalla figura" si vede come x_n si avvicini sempre più a l_+. Possiamo quantificarlo se riusciamo a quantificare $|x_{n+1} - x_n|$. Calcoliamo (supponendo $x_0 = 1$):

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left|\left(1 + \frac{1}{x_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\right| \\ &= \left|\frac{x_{n-1} - x_n}{x_n x_{n-1}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|, \end{aligned}$$

poiché

$$x_n x_{n-1} = x_n\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = x_n + 1 \geqslant 2.$$

Abbiamo usato che $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant 1$ per ogni n.

Ciò vuol dire che l'intervallo d'errore si dimezza (almeno) a ogni iterazione; cioè che l'algoritmo converge assai velocemente.

Esercizio 3. Ripetere la stessa analisi per l'equazione $x^2 - 2x - b = 0$, da cui possiamo facilmente calcolare $\sqrt{b+1}$.

Classicamente, a partire dal Rinascimento, questi ragionamenti hanno dato origine alla teoria delle `frazioni continue`,

$$x = 1 + \frac{1}{x} \text{ diventa } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}.$$

3.2 La successione di Fibonacci e le successioni esponenziali

3.2.1 Esponenziali e Fibonacci: una versione autoritaria

La `successione esponenziale di ragione` q (reale) e valore iniziale c è la successione $g(n) = cq^n$, che possiamo definire ricorsivamente come $g(0) = c$, $g(n+1) = qg(n)$ (la traiettoria di un sistema dinamico in cui il futuro dipende dal solo presente).

La `successione di Fibonacci` è definita da $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Cerchiamo di scrivere la successione di Fibonacci come somma di due successioni esponenziali g di ragione q e valore iniziale c, e G di ragione Q e valore iniziale C. Ciò che vi è qui di autoritario è che non si capisce bene come si sia arrivati a questa idea.

Posto $f(n) = g(n) + G(n)$, la nostra prima preoccupazione è di verificare se (quando) $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$. Calcoliamo,

$$\begin{aligned} cq^{n+1} + CQ^{n+1} &= f(n+1) = f(n) + f(n-1) \\ &= cq^n + CQ^n + cq^{n-1} + CQ^{n-1} \\ &= cq^{n+1}\left(\frac{q+1}{q^2}\right) + CQ^{n+1}\left(\frac{Q+1}{Q}\right), \end{aligned}$$

che accade certamente per ogni n (se e solo se, infatti) $\frac{q+1}{q^2} = \frac{Q+1}{Q} = 1$, cioè se q, Q sono soluzioni di $x^2 = x + 1$. Per determinare c, C abbiamo poi le condizioni,

$$\begin{cases} 0 = f(0) = c + C \\ 1 = f(1) = cq + CQ \end{cases}$$

Vediamo qui che se consideriamo $q=Q$ il sistema è impossibile: abbiamo bisogno di entrambe le soluzioni di $x^2=x+1$. Siano allora $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $Q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Risolvendo il sistema abbiamo $1=c(q-Q)=c\sqrt{5}$, quindi $c=1/\sqrt{5}=-C$ e

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+(-1)^{n+1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Esercizio 4. Usare lo stesso procedimento per trovare un'espressione chiusa per la successione di Fibonacci modificata, $f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(n+1)=f(n)+f(n-1)$.

Esercizio 5. Trovare un'espressione chiusa per $f(n+1)=f(n)+2f(n-1)$ con $f(0)=0,\ f(1)=1$.

Esercizio 6. Trovare un'espressione chiusa per $f(n+1)=2f(n)-f(n-1)$.

Esercizio 7. Partendo dall'identità $(x^2-x-1)(x-1)=x^3-2x^2+1$, trovare un'espressione chiusa per $f(n+1)=2f(n)-f(n-2)$ con $f(0)=f(1)=0$ e $f(2)=1$.

3.2.2 Funzioni generatrici

A una successione $f(n)$ $(n\geqslant 0)$ associamo la sua `funzione generatrice` nella variabile x:

$$F(x)=f(0)x+f(1)x^2+\cdots+f(n)x^n+\cdots$$

Questa somma di infiniti termini va presa per quanto ci riguarda in maniera del tutto formale, come un "polinomio infinito" (per quanto ciò possa scandalizzare oggi, da Newton a Eulero e oltre questo fu il punto di vista prevalente).

Mettiamo alla prova questo nuovo oggetto per il sistema dinamico (invariante nel tempo) $f(n)=qf(n-1)=q^2f(n-2)=\cdots=q^nf(0)$ (la successione esponenziale). Allora,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0)+f(0)qx+f(0)q^2x^2+\cdots \\ &= f(0)[1+qx+q^2x^2+\cdots] \\ &= \frac{f(0)}{1-qx}. \end{aligned}$$

Nota 1. Abbiamo qui calcolato una `serie geometrica` e questo richiede qualche giustificazione. Avendo fissato q reale, supponiamo che $|qx|<1$. Allora, posto $z=qx$,

$$\begin{aligned} 1+z+z^2+\cdots+z^n &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &\to \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

per $n\to\infty$, poiché $z^n\to 0$. Se non avete fatto i limiti, accettate questo fatto come evidente alla luce della semplice figura che si può fare per il caso $z=1/2$.

Esercizio 8. Mostrare che la funzione generatrice della funzione di Fibonacci $f(n)$ è $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$, usando le funzioni generatrici delle funzioni esponenziali di cui f è somma.

Cerchiamo la funzione generatrice della successione di Fibonacci partendo dalla definizione.

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots \\ xF(x) &= f(0)x+f(1)x^2+f(2)x^3+\cdots \\ (x+1)F(x) &= f(0)+[f(0)+f(1)]x+[f(1)+f(2)]x^2+\cdots \\ &= f(0)+f(2)x+f(3)x^2+\cdots \\ &= f(0)+\frac{1}{x}[f(2)x^2+f(3)x^3+\cdots] \\ &= f(0)+\frac{F(x)-f(0)-f(1)x}{x} \\ &= \frac{F(x)-x}{x}. \end{aligned}$$

Risolvendo, $F(x)(-x^2-x+1)=x$. Usando un po' di algebra e le serie geometriche possiamo arrivare all'espressione chiusa per la successione di Fibonacci.