



Foto da smartphone: Il potere nascosto della matematica dietro ogni scatto



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA

Martin Huska

martin.huska@unibo.it

Dipartimento di Matematica

ALMA MATER STUDIORUM – Università di Bologna

PLS – Piano Lauree Scientifiche 30-31/1, 4/2



Di cosa parleremo?

- Convoluzione
- Ritratto e panning
- Magic eraser - inpainting

Convoluzione

- Operazione matematica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, nei videogiochi, pe le immagini mediche, segnali 1D, in CNN (convolutional neural network)
- E' il prodotto tra due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definito come

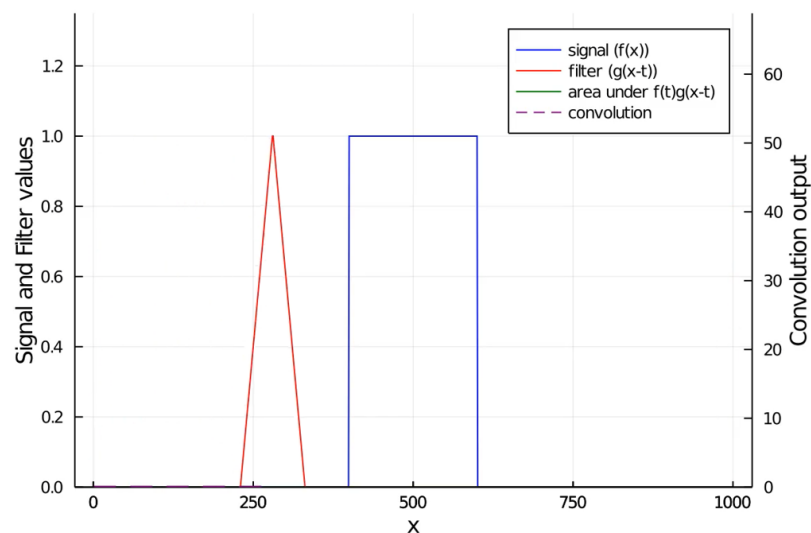
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$



Simbolo della
convoluzione



Integrale $\int_a^b h(x)dx$
Somma da a al b di $h(x)dx$



Convoluzione

- Operazione matematica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, nei videogiochi, pe le immagini mediche, segnali 1D, in CNN (convolutional neural network)
- E' il prodotto tra due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definito come

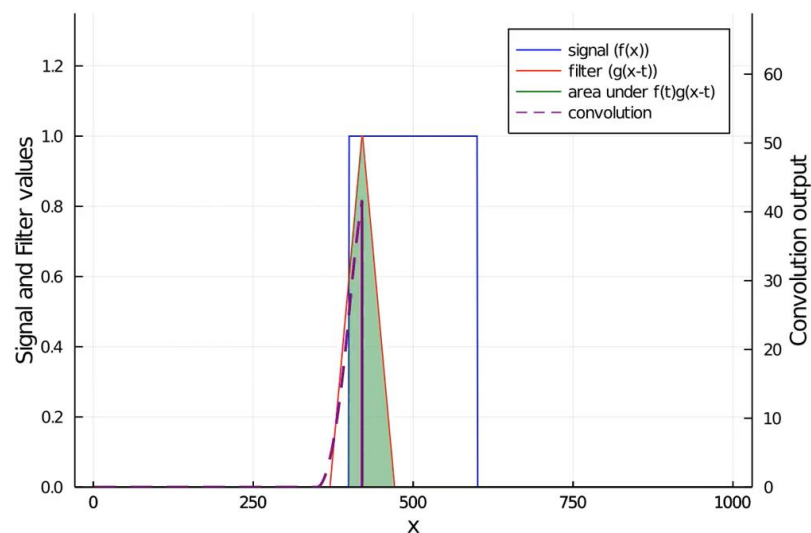
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$



Simbolo della
convoluzione



Integrale $\int_a^b h(x)dx$
Somma da a al b di $h(x)dx$



Convoluzione

- Operazione matematica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, nei videogiochi, per le immagini mediche, segnali 1D, in CNN (convolutional neural network)
- E' il prodotto tra due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definito come

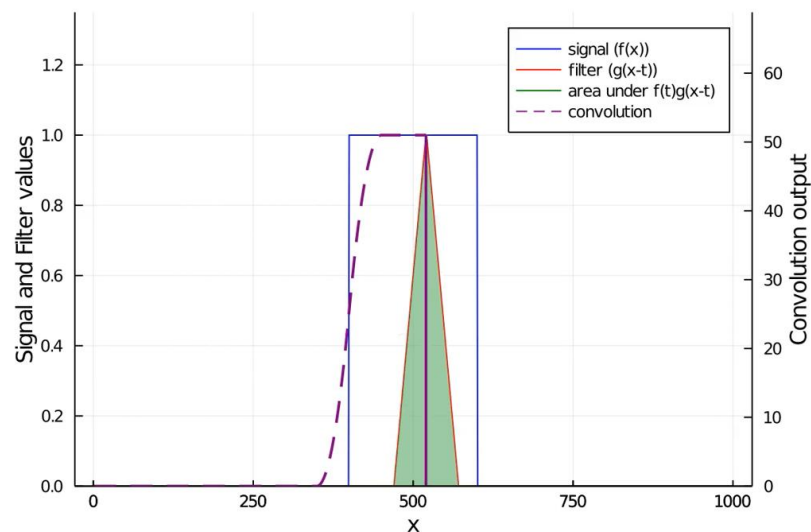
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$



Simbolo della
convoluzione



Integrale $\int_a^b h(x)dx$
Somma da a al b di $h(x)dx$



Convoluzione

- Operazione matematica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, nei videogiochi, per le immagini mediche, segnali 1D, in CNN (convolutional neural network)
- E' il prodotto tra due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definito come

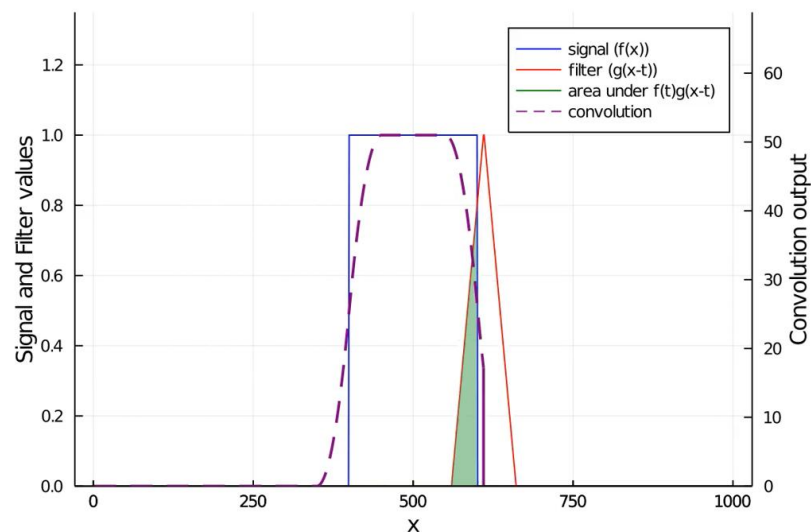
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$



Simbolo della
convoluzione



Integrale $\int_a^b h(x)dx$
Somma da a al b di $h(x)dx$



Convoluzione

- Operazione matematica fondamentale nell'elaborazione delle immagini, nei videogiochi, per le immagini mediche, segnali 1D, in CNN (convolutional neural network)
- E' il prodotto tra due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definito come

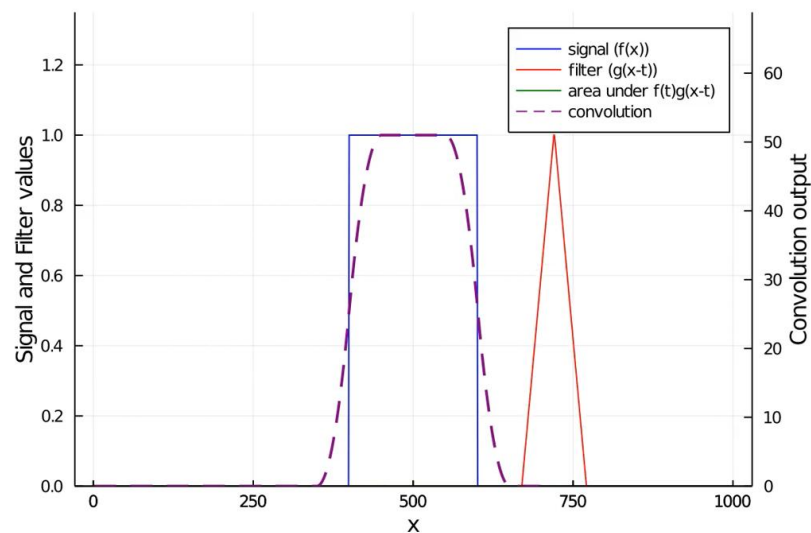
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$



Simbolo della
convoluzione



Integrale $\int_a^b h(x)dx$
Somma da a al b di $h(x)dx$



Convoluzione

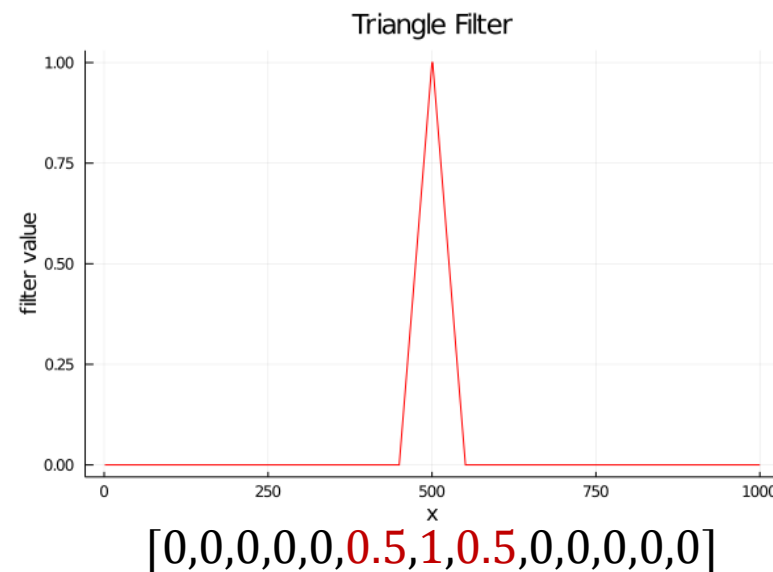
- Per vettori (liste) dei numeri:

$$(f * g)(i) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(p)g(i-p)$$

Somma $\sum_{p=a}^b h(p) = h(a) + h(a+1) + h(a+2) + \dots$

- Il filtro $g(p)$ è al supporto compatto – pochi valori vicini non-zero
- Scartiamo tutto ciò che risulta zero:

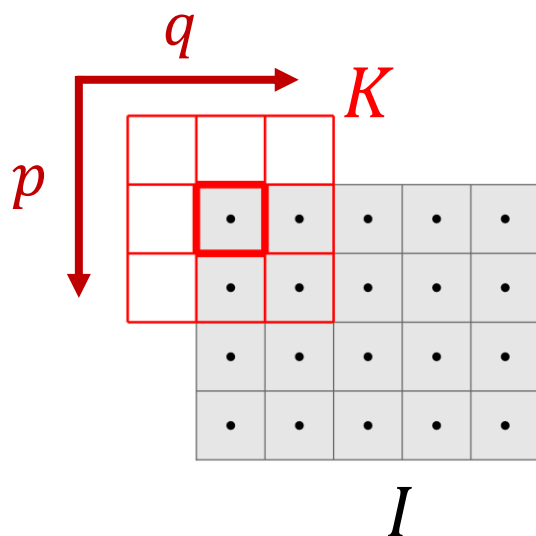
$$(f * g)(i) = \sum_{p=-m/2}^{m/2} f(p)g(i-p)$$



Convoluzione per le immagini

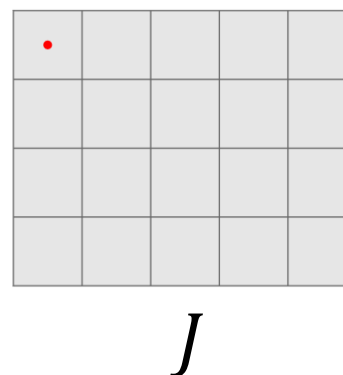
- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



$$i = 1$$

$$j = 1$$

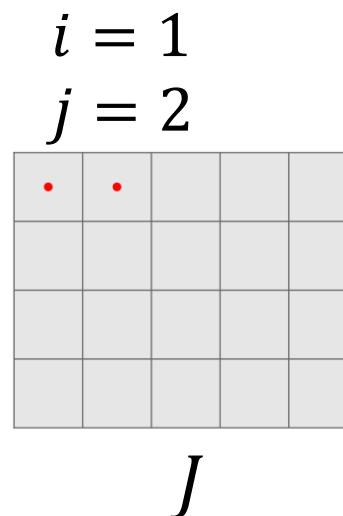
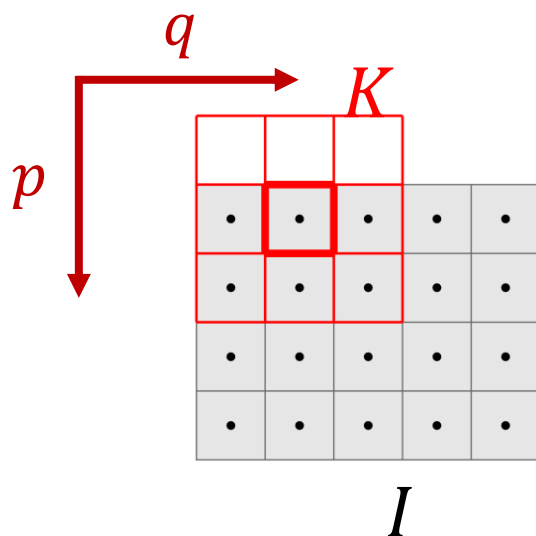


Credits: Luca Ratti

Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

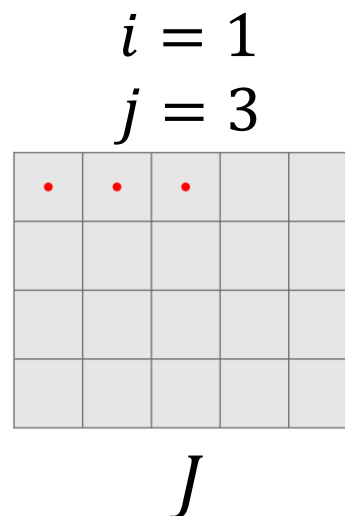
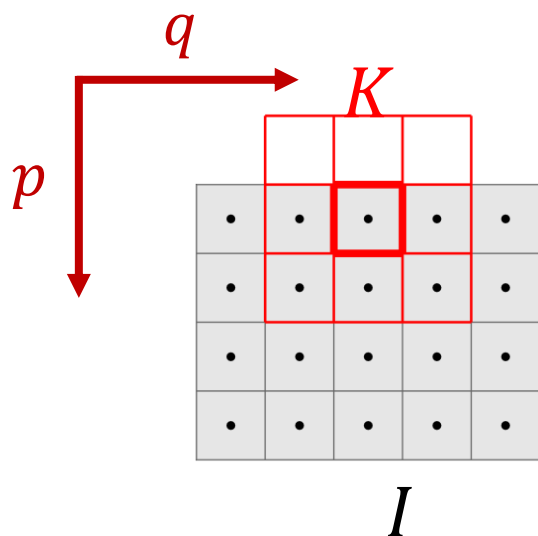
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

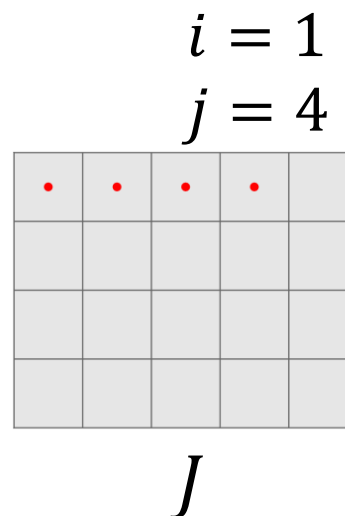
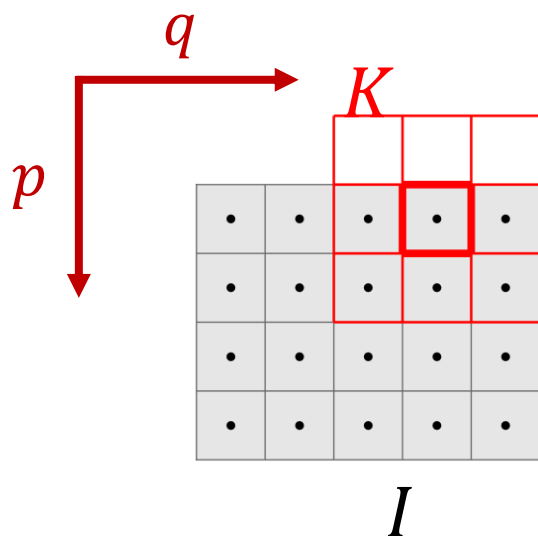
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

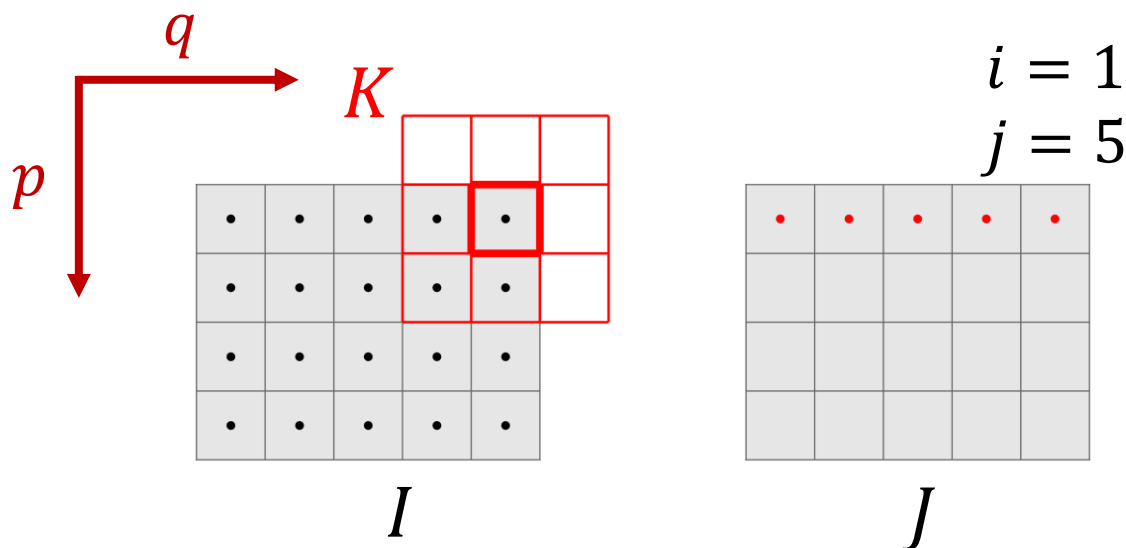
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

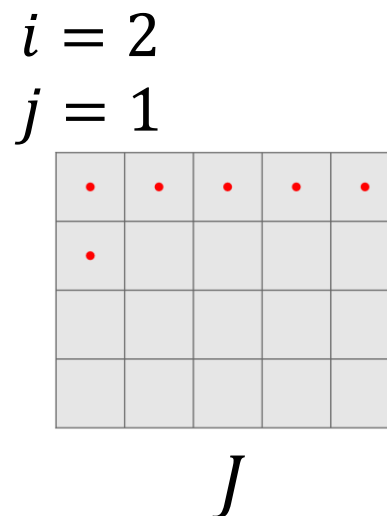
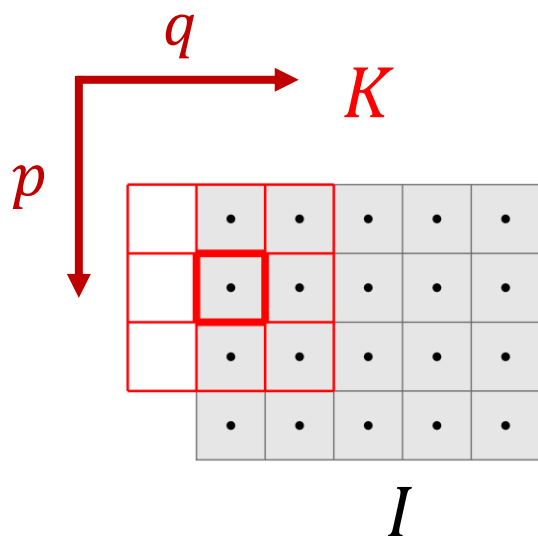
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

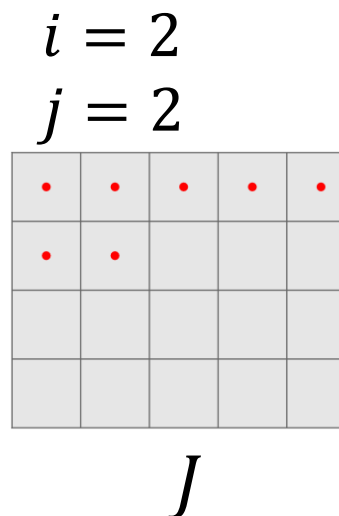
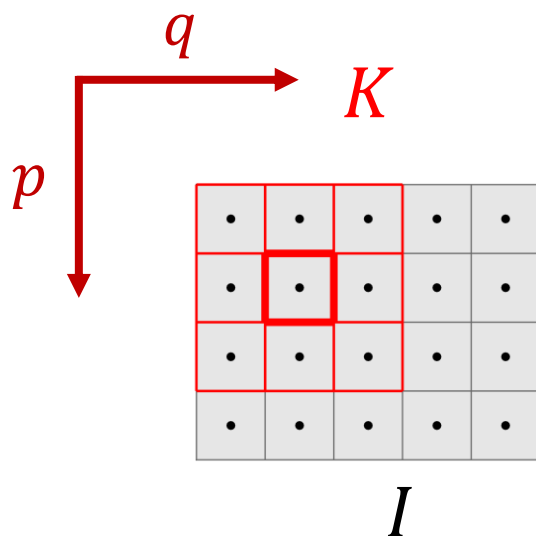
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

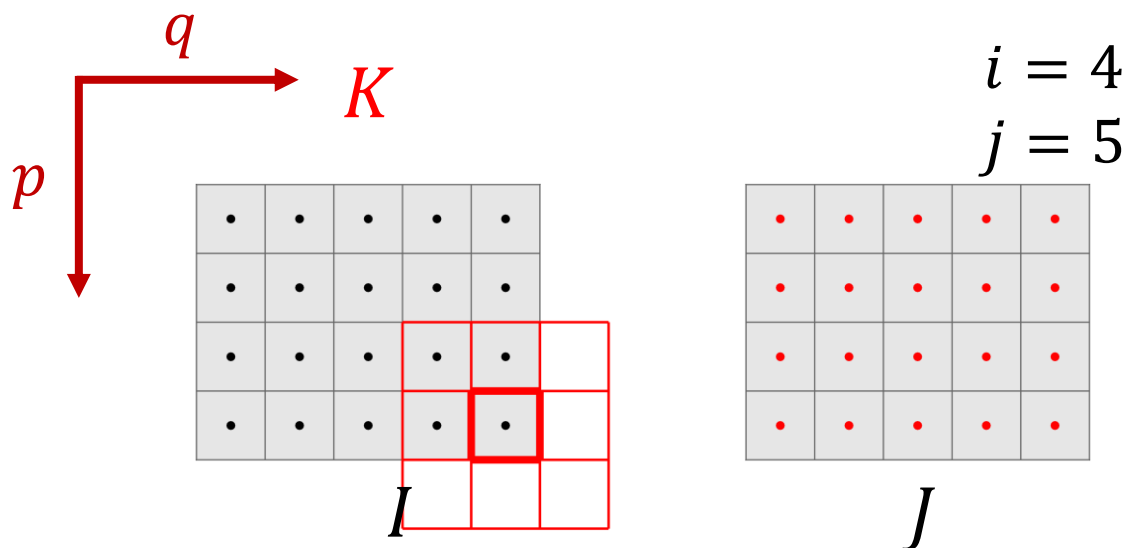
$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Convoluzione per le immagini

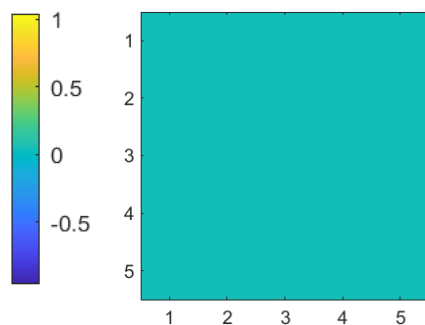
- Immagine monocromatica – matrice 4×5 , I
- Finestra – matrice 3×3 , K , centro $c = 2$

$$J(i, j) = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 K(p, q) \cdot I(i - 2 + p, j - 2 + q)$$



Elenco dei filtri comuni

- Filtro della media (mean):



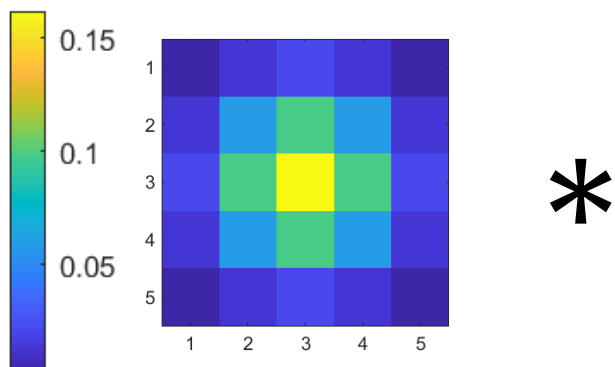
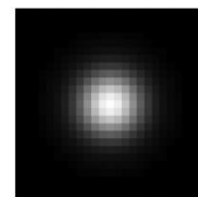
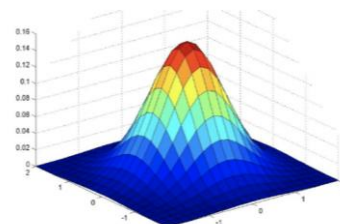
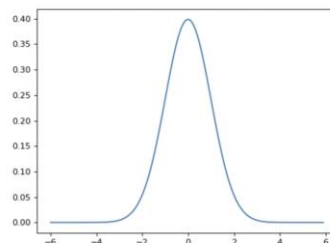
*



Elenco dei filtri comuni (2)

- Filtro di Gauss (Gaussian):

$$f_G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



*

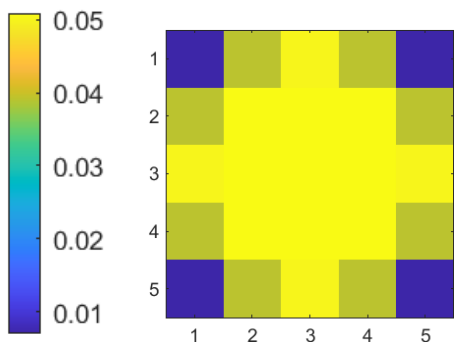


- Valore σ cambia larghezza
- Modella effetto bokeh delle camere DSLR per σ grande

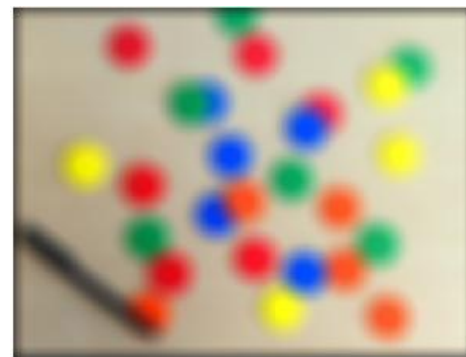


Elenco dei filtri comuni (3)

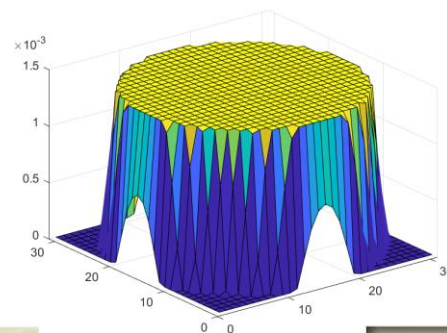
- Filtro del disco (Disk):



*

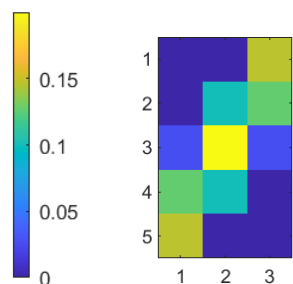


- Modella apertura della camera DSLR

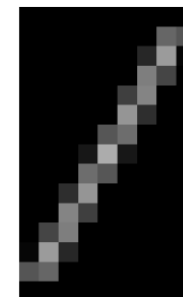
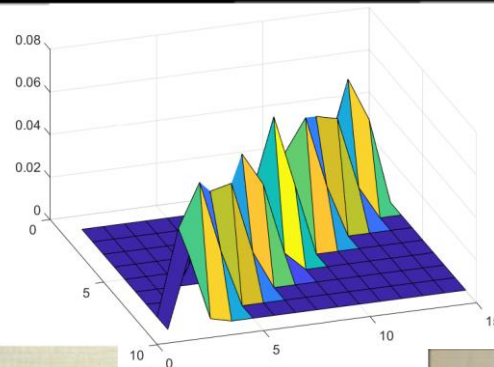


Elenco dei filtri comuni (4)

- Filtro di movimento:

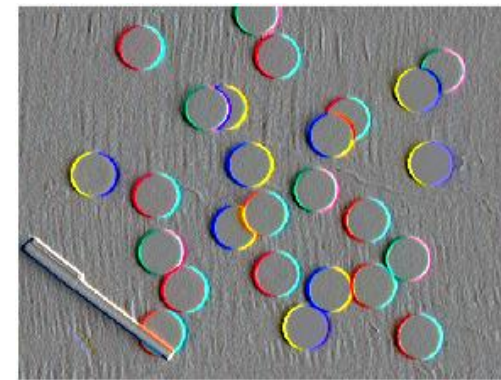
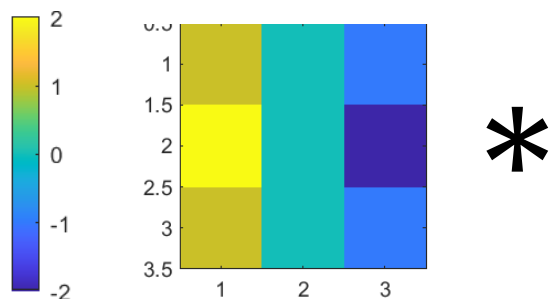


- Valore α cambia angolo
- Modella effetto del movimento della camera lungo angolo α

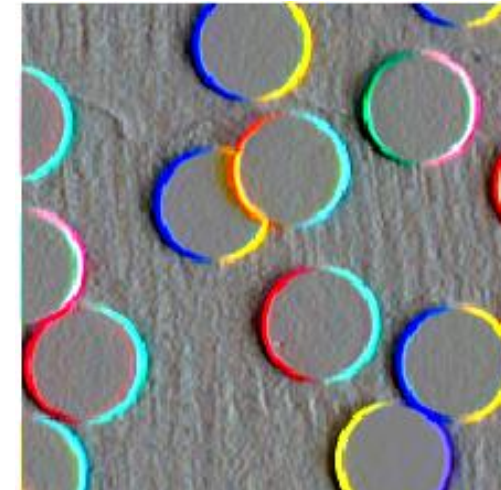


Elenco dei filtri comuni (5)

- Filtro Sobel orizzontale:

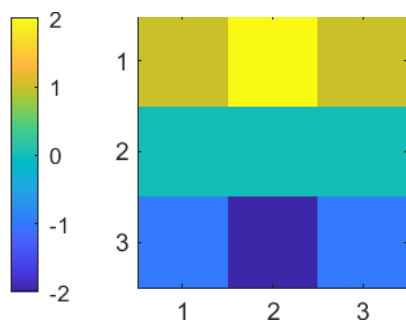


- Evidenzia bordi lungo direzione orizzontale

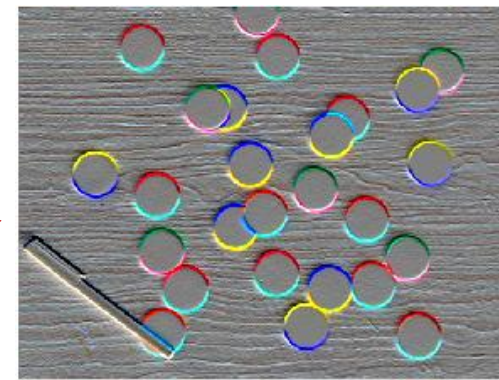


Elenco dei filtri comuni (6)

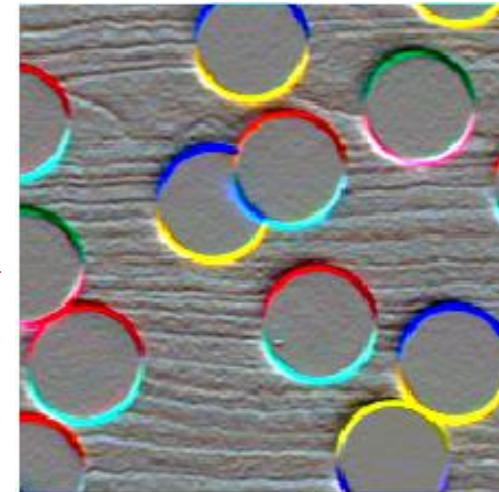
- Filtro Sobel verticale:



*

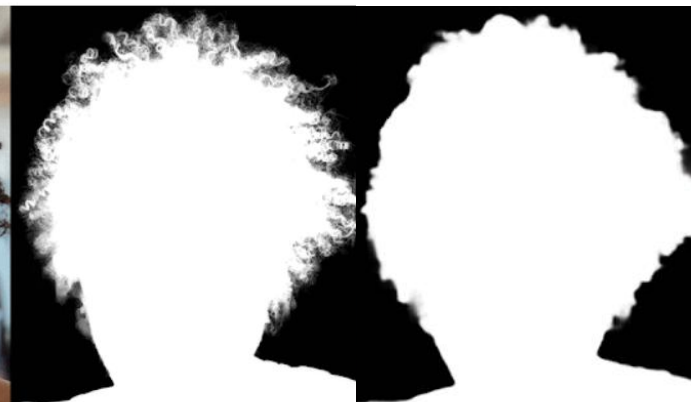
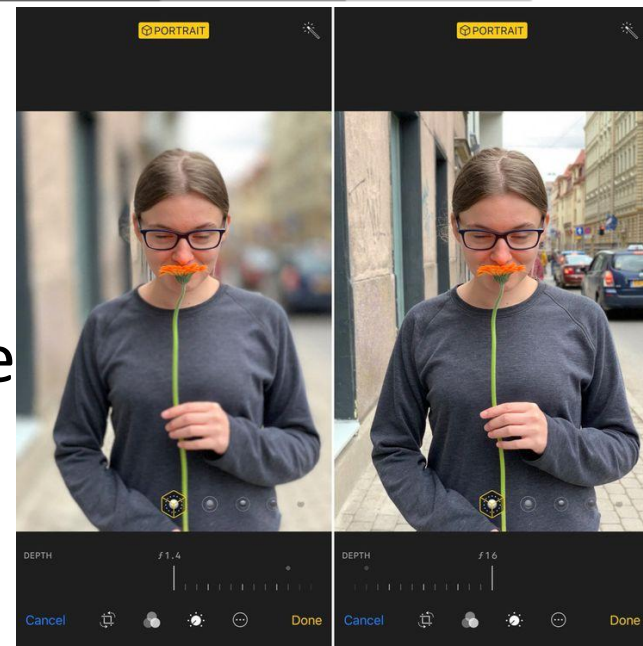


- Evidenzia bordi lungo direzione orizzontale



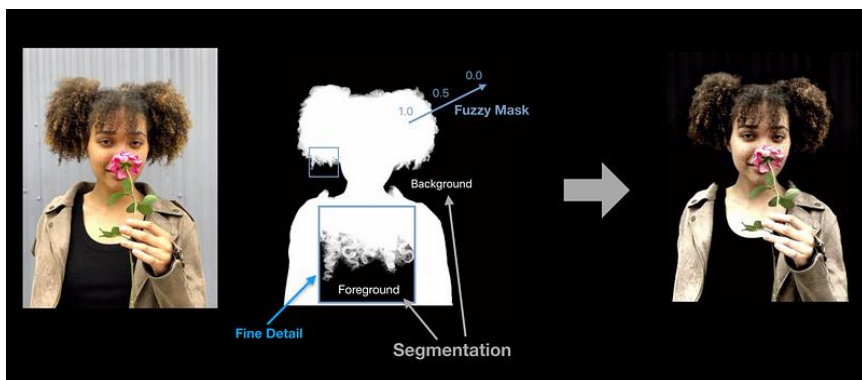
Ritratto e Panning

- Mettiamo le conoscenze insieme
- Obiettivo nel ritratto o panning:
Mantenere l'oggetto del focus intatto mentre si modifica lo sfondo per simulare l'effetto desiderato
- Strumenti utilizzati: segmentazione e convoluzione



Ritratto e Panning (2)

- Passi nella creazione del ritratto e panning:
 1. Segmentazione – tecniche automatiche combinano colore, profondità, filtering (e.g. Sobol) per definire la funzione $P(x, y)$ da fare thresholding e creare l'immagine della maschera M .
Bianco (1) – oggetto
Nero (0) – fondo
 2. Convoluzione
 3. Composizione



Ritratto e Panning (3)

- Passi nella creazione del ritratto e panning:
 1. Segmentazione
 2. Convoluzione – viene applicato il filtro o sull'immagine del fondo o sull'immagine originale che corrisponde al task che vogliamo ottenere.
 3. Composizione



Ritratto e Panning (4)

- Passi nella creazione del ritratto e panning:
 1. Segmentazione
 2. Convoluzione
 3. Composizione – $J = (I_{conv} \setminus M) \cup I_M$ Sostituire la parte dell'oggetto con mesa a fuoco

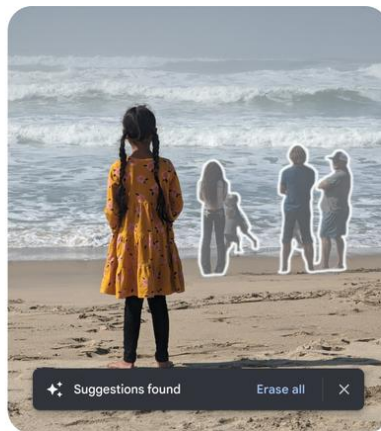
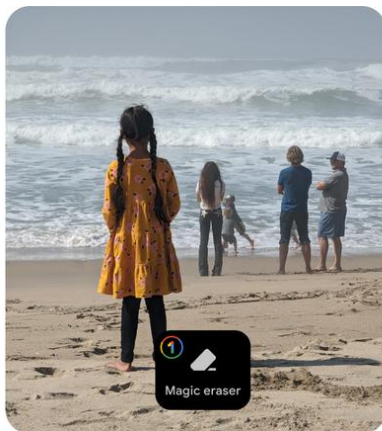


Magic Eraser

- Obiettivo: Eliminare oggetti distraenti dalla foto.

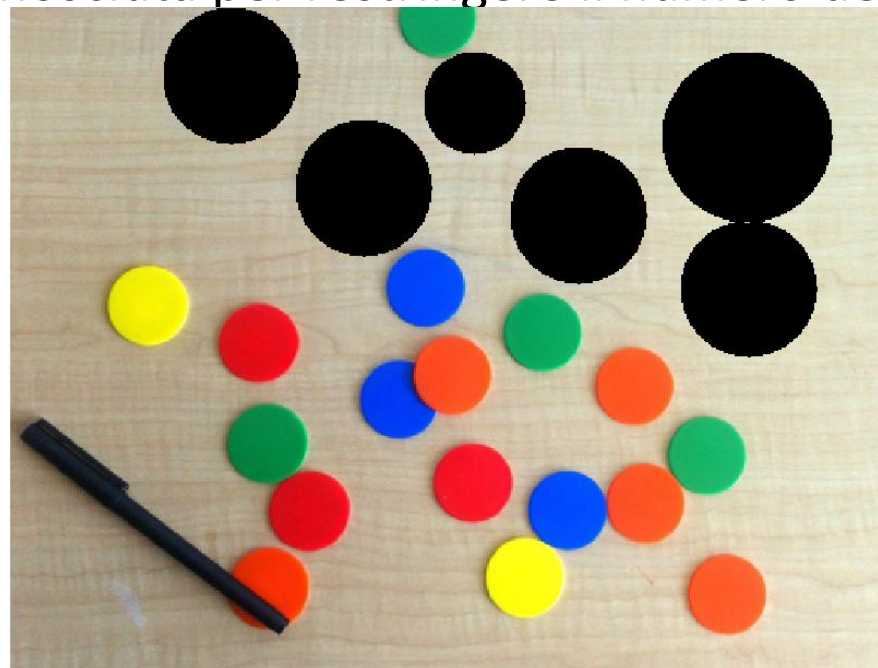
- Passi:

1. Segmentazione
2. Inpainting



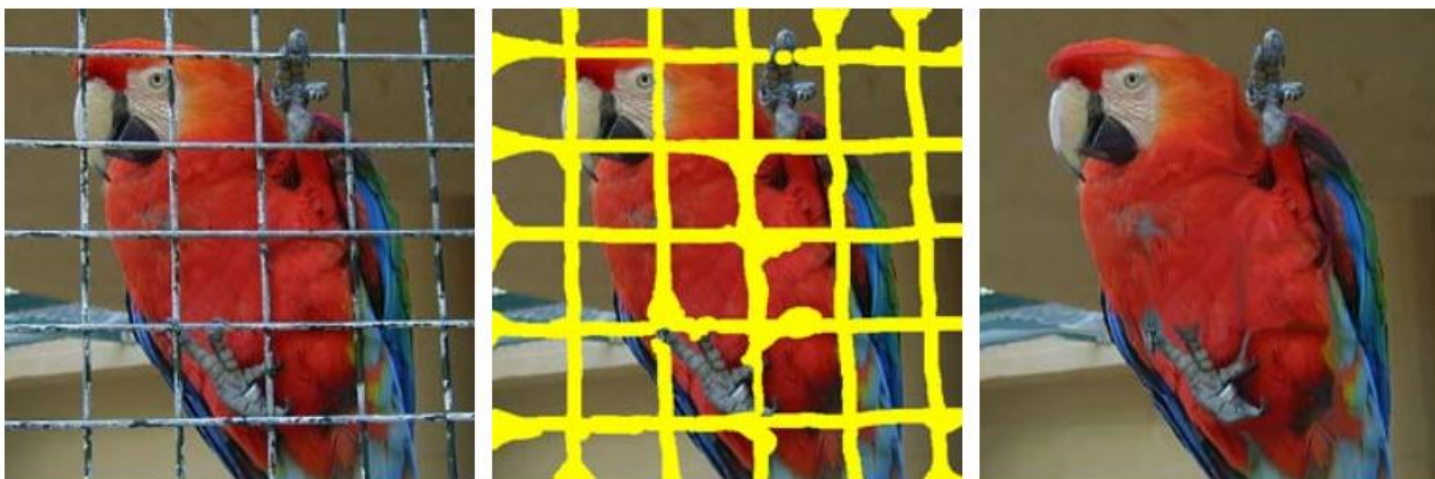
Inpainting

- Problema malposto – infinite soluzioni
- Formulazione matematica ha due termini:
 - Termine di fedeltà – la parte della foto che conosciamo
 - Termini di regolarizzazione – requisiti aggiuntivi sul comportamento dell'immagine nella parte sconosciuta per restringere il numero delle soluzioni.
- Ci sono diversi approcci ricercati



Inpainting – Metodo 1

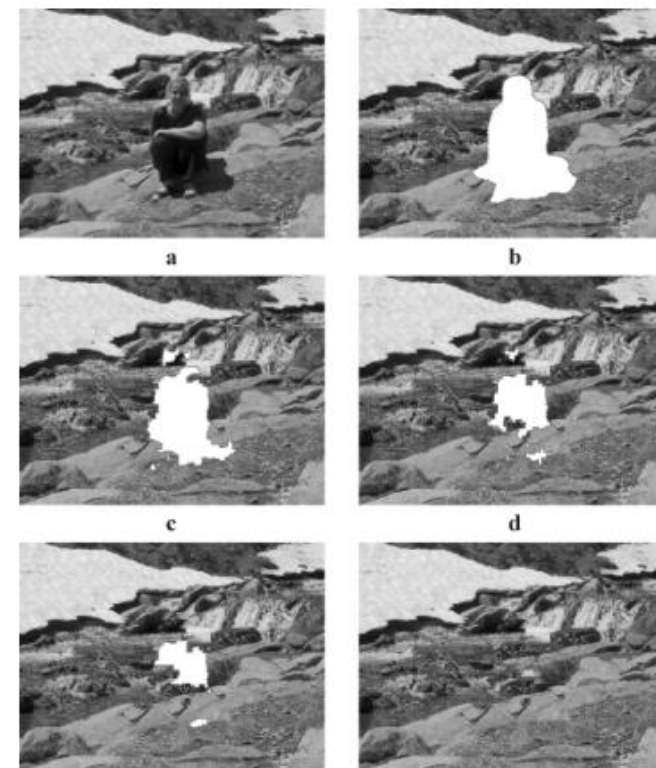
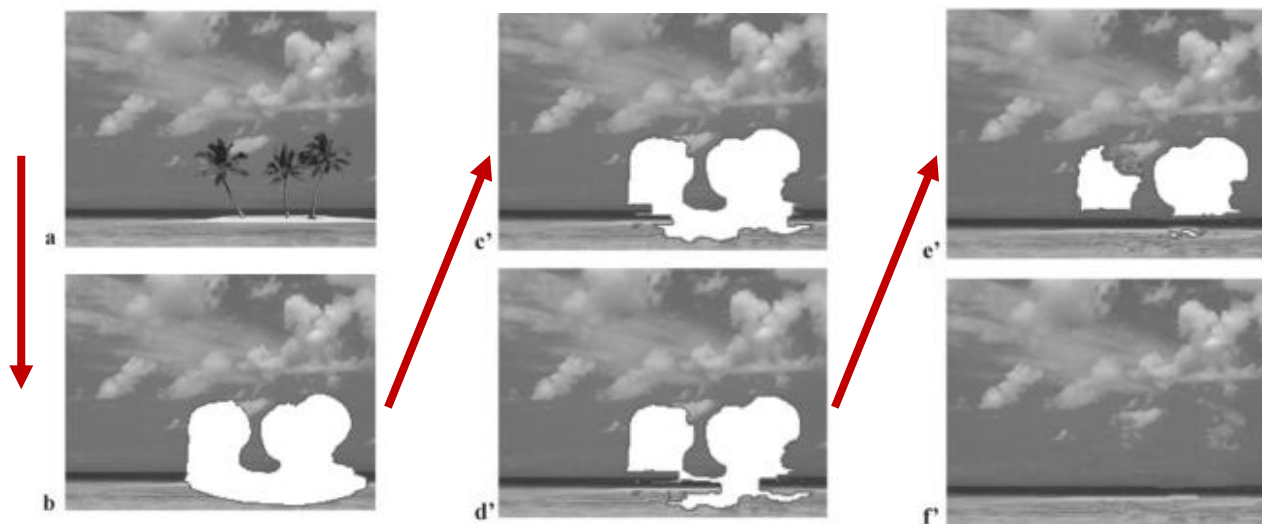
- Modello matematico (equazione) che descrive trasporto coerente
- L'inpainting viene eseguito verso l'interno a partire dai pixel di bordo della regione target.
- Il valore di inpainting per un pixel viene stimato dai suoi pixel vicini coerenti con valori noti.



[1] F. Bornemann and T. März. "Fast Image Inpainting Based on Coherence Transport." *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 28, 2007, pp. 259–278.

Inpainting – Metodo 2

- Metodo basato sulle misure di bontà per piccole patch dell'immagine nota
- Metodo iterativo



[2] Criminisi, A., P. Perez, and K. Toyama. "Region Filling and Object Removal by Exemplar-Based Image Inpainting."

IEEE Transactions on Image Processing. Vol. 13, No. 9, 2004, pp. 1200–1212.

1. Convoluzione

- Carica immagine 'tour.png', genera i filtri convoluzionali e applicali.
- Sperimenta come influiscono i parametri al risultato.
- Per il filtro Gaussiano, fissa la $\sigma = 2$, quanto grande deve essere il filtro in modo tale che il risultato non cambia più visivamente?
- Applica il filtro $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 2 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - K_{Gauss}$. Quale effetto ottieni?

2. Ritratto

- Carica l'immagine 'dog.png', con la maschera 'dog_M.png'.
- Crea il suo ritratto. Come influenzano i parametri della convoluzione il risultato?
- Come influisce la maschera M sul risultato?

3. Panning

- Carica l'immagine 'moto.png', con la maschera 'moto_M.png'
- Scegli la tipologia del filtro per creare l'effetto in movimento.
- Crea il panning per due direzioni diverse e confronta i risultati

4. Magic Eraser

1. Carica immagine 'ghound.png', con la maschera 'ghound_M.png'. Confronta i due metodi di inpainting. Dove sbagliano entrambi nell'eliminazione del cane?
2. Carica immagine 'bike.png'. Usando le maschere 'bike_MX.png', per $X = \{1,2,3,4\}$, quale dei ciclisti viene eliminato visivamente meglio?

Questionario

Laboratori intensivi matematica
PLS 2024/25

